

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 530.182.1(043)

Қолжазба құқығында

БЕКОВА ГҮЛДАНА ТАҢБАЙҚЫЗЫ

**Ферромагнетиктердің сызықты емес солитонды
модельдерін зерттеу**

6D060400 – Физика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының
докторы, академик
Р.Мырзакулов

Шетелдік ғылыми кеңесші
доктор PhD, профессор
Д.Синглетон
(Калифорния мемлекеттік
университеті, АҚШ)

Қазақстан Республикасы
Астана, 2023

МАЗМҰНЫ

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР	4
КІРІСПЕ	5
1 ГЕЙЗЕНБЕРГТІҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ФЕРРОМАГНЕТИК ТЕҢДЕУІ ЖӘНЕ КОМПЛЕКСТІ БАЙЛАНЫСҚАН ДИСПЕРСИЯЛЫ ЕМЕС ТЕҢДЕУ	10
1.1 Ферромагнетиктердің бейсызықты солитонды модельдеріндегі негізгі теориялық зерттеулерге шолу.....	10
1.2 Магниттік жүйелердің классикалық және кванттық модельдері	12
1.3 Гейзенбергтің ферромагнетик моделі.....	14
1.4 Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделі	15
1.5 Лакшманан (геометриялық) эквивалентті баламасы	16
1.6 Калибровті эквивалентті баламасы	20
1.7 Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделіне қатысты интегралды беттер	21
1.7.1 1-жағдай: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{r}_x$	23
1.7.2 2-жағдай: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{r}_t$	26
1.8 Индукцияланған Фокас-Ленеллс теңдеуінің қисықтарының интегралды қозғалыстары	27
2 КЕЛІСІЛГЕН КӨЗДЕРІ БАР ГЕЙЗЕНБЕРГТІҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ФЕРРОМАГНЕТИК ТЕҢДЕУІ ЖӘНЕ КОМПЛЕКСТІ БАЙЛАНЫСҚАН ДИСПЕРСИЯЛЫ ЕМЕС ТЕҢДЕУ	35
2.1 Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделі	36
2.2 Кеңістік қисықтарының интегралданатын қозғалыстары. Геометриялық эквивалентті Лакшманан теңдеуі	39
2.3 Калибровті эквивалентті баламасы	42
2.4 Комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі	42
2.5 Масштабты түрлендіру	47
2.6 Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуімен тудыратын интегралды бет	47
2.7 Конно-Онно теңдеуінің солитонды шешімдері	49
3 КЕЙБІР ИНТЕГРАЛДАНАТЫН ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ СОЛИТОНДЫ ЖӘНЕ СОЛИТОН ТӘРІЗДІ ШЕШІМДЕРІ	56
3.1 Шредингер-Максвелл-Блох теңдеуі	61
3.1.1 Лакс ұсынысы	62
3.1.2 Дарбу түрлендіруі.....	63
3.1.3 Солитонды шешімдері	64
3.2 Хирота жүйесі	66
3.2.1 Лакс ұсынысы	67
3.2.2 Дарбу түрлендіруі	68
3.2.3 Солитондық шешімі	71

3.2.4 Кеңейтілген \tanh әдісінің алгоритмі	72
3.2.5 Кеңейтілген \tanh әдісін қолдану.....	73
3.3 Бейсызықты Шредингер теңдеуі	78
3.3.1 Дарбу түрлендіруі	79
3.3.2 Солитондық шешімі	80
3.3.3 Қиратушы толқынды шешімі.....	82
3.3.4 Сақталу заңдары	84
ҚОРЫТЫНДЫ.....	89
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	90

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

КШӘ	– кері шашырау әдісі
ГФ	– Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуі
ЛЛ	– Ландау-Лифшиц
КБД жүйе	– комплексті байланысқан дисперсиялы емес жүйе
БДТ	– бейсызықты дифференциалдық теңдеу
КО теңдеуі	– Конно-Ооно теңдеуі
ЖКО	– жалпыланған Конно-Ооно
ШМБ	– Шредингер Максвелл-Блох
БШ	– Бейсызықты Шредингер теңдеуі
КдФ	– Кортевег-де Фриз
\mathbf{S}	– Үш компонентті спин векторы
λ	– спектрлік параметр
\mathbf{M}	– Магниттелу векторы

КІРІСПЕ

Зерттелетін ғылыми мәселенің қазіргі жағдайын бағалау.

Соңғы кезде магниттік ортадағы бейсызықты құбылыстарды теориялық және тәжірибелік тұрғыдан зерттеуге ғалымдардың қызығушылығы артты. Бұл қызығушылық негізінен магниттік кристалдардың магнетиктеріндегі бейсызықты қасиеттері көптеген салаларда кеңінен қолданылуына байланысты. Мысалы, қазіргі компьютерлердің кейбір компоненттерінің жылдамдығы цилиндрлік магниттік домендердің динамикасына байланысты, олар негізінен ферромагнитті материалдардың бейсызықты құрылымдары болып табылады. Сонымен қатар, магниттік кристалдардың бейсызықты қозуы да болуы мүмкін [1].

Магнетиктердегі солитондардың, яғни магниттік солитондардың маңызды мысалы магниттелу бағыттары әр түрлі біркелкі магниттелген домендерді бөлетін домен қабырғасы болып табылады. Қазіргі компьютерлерде ақпаратты жіберу және жазу үшін қолданылатын цилиндрлік магниттік домендер [2] ерекше қызығушылық тудырады.

Бейсызықты құбылыстарды өзара әрекеттесуші спиндер – магنونдар жүйелерінің элементар қозуларының өзара әрекеті тұрғысынан сипаттауға болады [3]. Магنونдық әсерлесу процестері магниттің сыртқы өрісіне реакциясын қалыптастыруда маңызды рөл атқарып қана қоймай, магниттік жүйелердің кинетикалық және релаксациялық қасиеттеріне де айтарлықтай әсер етеді [4, 5]. Магнетиктердегі бейсызықты құбылыстарды теориялық сипаттауда соңғы уақытқа дейін әлсіз бейсызықты ұғымы [6, 7] қолданылды, бұл магنونдардың әрекеттесу энергиясы «еркін» магنونның энергиясымен салыстырғанда аз екенін білдіреді. Алайда, магнетиктер жағдайында керісінше болуы мүмкін, яғни, еркін магنونдардың өзара әрекеттесу энергиясы «еркін» магنونның энергиясымен салыстырылатын болса. Мұндай жағдайларда әлсіз бейсызықты сипаттама ұғымдарын қолдану енді зерттелетін әсерге сәйкес келмейді және магнетиктердегі күшті бейсызықты құбылыстарды сипаттаудың жаңа тұжырымдамасын және әдістерін енгізу қажет.

Соңғы отызжылдықта ферромагнетиктердегі спиндік толқындардың бейсызықты қасиеттерін белсенді зерттеу басталды [8-10]. Басқа бейсызықты толқындық процестерді теориялық тұрғыдан зерттеуде маңызды рөл атқарған іргелі ғылымдардың бір бағыты – солитондар теориясы болып табылады. Магнетиктердегі солитондар кеңістікте локализацияланған магниттік момент толқындары болып табылады және теориялық тұрғыдан белгілі бір шекаралық шарттарды қанағаттандыратын Ландау-Лифшиц, Гейзенберг, бейсызықты Шредингер теңдеулерінің нақты шешімдері ретінде қарастырылады. Қазіргі кезде солитондар теориясы қазіргі физиканың қарқынды дамып келе жатқан бағыттарының бірі болып табылады. Бұл зерттеулер маңызды қолданбалы қызығушылық ие, мысалы, телекоммуникациялық жүйелерде, лазерлік жүйелерде, бейсызықты тарату желілерінде, оптикалық ауыстырыш-қосқыштарда және байланыс желілерінде деректерді өңдеу және беру үшін бейсызықты құрылғыларды құруда қолдану [11-13].

Зерттеу тақырыбының өзектілігі.

Ғалымдар бейсызықты ортада, яғни т.б. орталарда спиндік толқындардың таралу ерекшеліктерін зерттей бастағаннан кейін, ферромагнетиктің солитонды модельдерінің түрлері қарқынды дами бастады. Ферромагнетиктерде сызықты емес солитонды модельдерді зерттеу физика мен материалтанудағы қазіргі және перспективті бағыт болып табылады. Зерттеудің бұл бағыты қазіргі заманғы технологиялар үшін жаңа магниттік құрылғылар мен материалдарды әзірлеу қажеттілігіне байланысты барған сайын маңызды болып келеді.

Солитондар – магниттік жүйелердегі ерекше қасиеттері бар және магниттік процестерді басқару үшін пайдаланылуы мүмкін ерекше толқындық құрылымдар. Бейсызықты солитон модельдерін зерттеу солитондардың негізінде жатқан физикалық механизмдерді және олардың қоршаған ортамен әрекеттесуін тереңірек түсінуге мүмкіндік береді. Бұл магниттік жады элементтері және магниттік транзисторлар сияқты жаңа магниттік құрылғыларды әзірлеуге, сондай-ақ магниттік сенсорлар мен жазу құрылғыларының дизайнын оңтайландыруға маңызды әсер етеді. Сонымен ферромагнетиктерде бейсызықты солитонды модельдерді зерттеу іргелі ғылымды ғана емес, сонымен қатар, қазіргі заманғы магниттік технологиялар мен материалтануды дамытуға әсер ете алатын әлеуетті практикалық қолдануларға ие.

Осы саладағы теориялық зерттеулер ферромагнетиктерде жаңа құбылыстар мен әсерлерді болжауға мүмкіндік береді, бұл тәжірибелік зерттеулер мен жаңа технологиялардың дамуын ынталандыруы мүмкін. Сонымен қатар, сызықты емес солитонды модельдерін зерттеу магниттік құбылыстар мен бейсызықты динамика туралы іргелі түсінігімізді кеңейтуге ықпал етеді. Бұл зерттеушілерге бүкіл бейсызықты динамиканы егжей-тегжейлі зерттеуге мүмкіндік беретін жалпы модельді табу туралы іргелі мәселені шешуге мүмкіндік береді.

Ферромагниттік пленкалар мен олардың негізінде жасалған құрылымдар аса жоғары жиілікті сәулеленуде ораушы толқынды солитондарды зерттеу үшін қолайлы. Мұндай ортада спиндік толқындар таралуы мүмкін. Ораушы толқын спинінің солитонын бейсызықты Шредингер теңдеуі [14] арқылы сипаттауға болады. Кейбір зерттеулер солитонды процестерді дәлірек сипаттау үшін классикалық бейсызықты Шредингер теңдеуіне сызықты және бейсызықты өшу, козу және жоғары дисперсиялық мүшелер сияқты қосымша мүшелерді қосу арқылы модификациялау қажет екенін көрсетеді. Демек, қазіргі уақытта көптеген зерттеушілер эксперименттерде байқалатын солитондық құбылыстарды сипаттайтын жаңа теориялық модельдерді әзірлеумен айналысуда. Сол себепті бұл диссертацияда келтірілген нәтижелер өзекті болып табылады [15].

Жоғарыда аталған математикалық физиканың заманауи мәселелеріне сүйене отырып, **«Ферромагнетиктердегі сызықты емес солитонды модельдерді зерттеу»** атты диссертациялық жұмыс бейсызықты ортада спиндік толқындардың таралуын сипаттайтын Гейзенбергтің ферромагнетиктер моделі типті кейбір бейсызықты модельдерді теориялық тұрғыдан зерттеуге арналған.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты: Ферромагнетиктердің Гейзенберг типті кейбір бейсызықты модельдерін теориялық тұрғыдан зерттеу және спиндік толқындардың өздігінен әрекеттесуін сипаттайтын тендеулердің солитондық шешімдерін зерттеу.

Жоғарыдағы айтылған мақсатқа жету үшін келесі **міндеттер** қойылды:

1. Жалпыланған Гейзенбергтің ферромагнетик тендеуіне геометриялық және калибровті эквивалентті болатын бейсызықты эволюциялық тендеулерді анықтау.

2. Келісілген көздері бар жалпыланған Гейзенбергтің ферромагнетик модельдері болып табылатын тендеулердің дифференциалдық геометриясын зерттеу.

3. Ферромагнетиктердегі спиндік толқындардың әрекеттесуін сипаттайтын бейсызықты Шредингер тендеуі типті тендеулердің солитонды шешімдерін алу және олардың өзгеру динамикасын зерттеу.

Зерттеу нысандары. Спиндік жүйелердің бейсызықты модельдері.

Зерттеу пәні. Бейсызықты Шредингер тендеуі мен Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик тендеуінің солитондық шешімдерін іздеу.

Зерттеу әдісі. Бейсызықты толқындардың динамикасын сипаттайтын солитондық шешімдерді алу үшін Дарбу түрлендіру әдісі қолданылды, ол солитондар динамикасының эволюциясын зерттеу үшін белсенді түрде қолданылды.

Диссертациялық жұмыстың ғылыми жаңалығы, алғаш рет:

1. Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик тендеуі мен Коно-Оно тендеуімен арасында геометриялық және калибровті байланыс орнатылды. Коно-Оно тендеуінің солитонды шешімі алынды.

2. Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделі мен жалпыланған комплексті қысқа импульсті тендеуінің дифференциалды геометриясы зерттелінді.

3. Ферромагнетиктердегі спиндік толқындардың өздігінен әрекеттесуін сипаттайтын бейсызықты Шредингер тендеуі типті тендеулердің бір және екі солитонды шешімдері құрылды, олардың сақталу заңдары табылды.

Қорғауға арналған негізгі тұжырымдар:

1. Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделінде спиндік вектор \mathbf{A} және базистік вектор \mathbf{e}_1 тепе-тең ($\mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_1$) болғанда, комплексті қысқа импульсты тендеудің жалпыланған түрімен өзара геометриялық және калибровті эквивалентті болады.

2. Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделінде потенциал $W = 0$ болса, онда ол Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделіне келеді және ол комплексті байланысқан дисперсиясыз Коно-Оно тендеуімен геометриялық эквивалентті болады және оның шешімі солитонды шешімге сәйкес келеді.

3. Ферромагнетиктердегі спиндік толқындарды сипаттайтын екі өлшемді бейсызықты Шредингер тендеуінің $\delta = 1$ «тартылыс» кезінде бір және екі солитонды шешімдері болады және оның екі солитонның соқтығысуы серпімді, яғни әсерлескеннен кейін өзінің пішінін мен жылдамдығын сақтайды.

Жұмыстың теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертациялық жұмыс теориялық сипатта. Алынған нәтижелерді солитондар теориясында, мысалы, Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеулерінің динамикасын зерттеуде қолдануға болады. Сондай-ақ жұмыс нәтижелерін солитонды, солитон тәрізді шешімдерді алу үшін, бейсызықты ортадағы, оптикалық тарату желілеріндегі электромагниттік толқындар және т.б. жұмыстар үшін қолданылады. Диссертацияның кейбір нәтижелерін элективті курстарды («Солитондар теориясы», «Гидродинамикалық жүйелердің теориясы») оқығанда оқу үдерісінде пайдалануға болады.

Нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі. Ғылыми нәтижелердің сенімділігі импакт-факторы жоғары шетелдік журналдарда және халықаралық шетелдік конференциялар материалдарының жинақтарындағы жарияланған жұмыстарға шетелдік ғалымдардың сілтеме жасауымен расталады.

Автордың жеке үлесі. Зерттеу барысында автор ғылыми жетекшінің басшылығымен барлық есептеулерді орындай отырып, жұмыстың барлық кезеңдеріне қатысып, табылған шешімдердің графиктерін тұрғызып, басылымдарды өзі дайындады.

Диссертациялық жұмыстың апробациясы. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер келесі конференцияларда баяндалып, талқыланды:

1. 22th International conference Geometry, Integrability and Quantization (Varna, 2019. – June 8-13).

2. The 26th International conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (Prague, 2019. – July 8 - 12).

3. 5th International conference Modern problems of applied mathematics and information technology - Al-Khorezmiy (Bukhara, 2016. –November 9-10).

4. The XII. International Symposium on Quantum Theory and Symmetries (QTS12) (Prague, Czech Republic, 2023. – July 24-28).

Сонымен қатар, алынған нәтижелер Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Жалпы және теориялық физика кафедрасында және Еуразиялық халықаралық теориялық физика орталығының семинарларында баяндалып, талқыланды.

Диссертация тақырыбы бойынша жарияланымдар. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері бойынша қазақстандық және шетелдік журналдарда 12 мақала жарияланды, оның ішінде Web of Science деректер және Scopus базаларына енгізілген импакт-факторы жоғары шетелдік журналда 2 мақала (Quartile Q2), IF= 1,783 және IF=3,1) және Scopus (Процентиль 56 және 73, физика және астрономия бағыты); ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған мерзімді басылымдарындағы 3 мақала; Web of Science, Scopus дерекқорларындағы индекстелген журналдардың конференция жинағындағы 7 мақала жарияланды. Негізгі жұмыстар:

1. Zhassybayeva M., Bekova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Integrable motions of curves of the induced Fokas–Lenells equation // Optik. -2023. –Vol. 286. – P.170979. Impact Factor 2022 – 3.1. Q2, Процентиль 73.

2. Yesmakhanova K., Nugmanova G., Shaikhova G., Bekova G., Myrzakulov R. Coupled Dispersionless and Generalized Heisenberg Ferromagnet Equations with Self-Consistent Sources: Geometry and Equivalence // International Journal Geometrical Methods in Modern Physics. – 2020. – Vol. 17, No 7. – P. 2050104. Impact Factor 2019 – 1.287. Q2, Процентиль 47.

3. Yesmahanova, K.R., Shaikhova, G.N., Bekova, G.T., Myrzakulova, Z.R. Determinant representation of Darboux transformation for the (2+1)-dimensional Schrodinger-Maxwell-Bloch equation // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2016. – Vol. 441. – P. 183-198.

4. Yesmakhanova K., Shaikhova G., Bekova G. Soliton solutions of the Hirota's system // AIP Conf. Proc. – 2016. – Vol. 1759. – P. 020147. Процентиль 15.

5. Shaikhova G., Yesmakhanova K., Bekova G., Ybyraiymova S. Conservation laws of the Hirota-Maxwell-Bloch system and its reductions // Journal of Physics: Conference Series. – 2017.–Vol. 936, N1. –P. 012098. Процентиль 22.

6. Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K. Travelling wave solutions for the two-dimensional Hirota system of equations // AIP Conference Proceedings. – 2018.–Vol. 1997, –P. 020039. Процентиль 15.

7. Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Conservation Laws for Two Dimensional Nonlinear Schrodinger Equation // AIP Conference Proceedings. –2019.–vol. 2159, –P.030003. Процентиль 15.

8. Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Darboux transformation and soliton solution for generalized Konno-Oono Equation // Journal of Physics: Conference Series. –2019. –vol.1416. –P. 012003. Процентиль 22.

9. Ismailova F.Ye., Bekova G., Shaikhova G.N. Traveling wave solutions for the two-dimensional generalized nonlinear Schrodinger equation // Вестник КазНУ. – 2019. – №4 (134). - стр. 534-540.

10. Бекова Г.Т., Мусатай С.С., Абыканова Б.Т. Решения типа разрушительных волн двумерного нелинейного уравнения Шредингера // Вестник КазНУ. -2020. №2 (138). стр.-715-721.

Н-индекс және сілтемелер. Докторант Г.Т. Бекованың Web of Science базасында h-index-7 (Citation 114) және Scopus базасында h-index-9 (Citation 124) ғылымиметриялық көрсеткіштерге ие.

Диссертация тақырыбының ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Жұмыс келесі жобалар бойынша ғылыми-зерттеу жұмыстарының жоспарына сәйкес жүргізілді:

1. «Исследование обобщенных нелинейных уравнений Шредингера и их интегральных редукций» (2015-2017), мемл. тіркеу № 0115PK01346. Келісімшарт №268, 04.02.2015 ж. Жетекшісі: К.Р. Есмаханова.

2. «Солитондар теориясы негізінде ферромагнетиктердегі толқындық процестерді моделдеу» (2022-2024). АР 14972426. Жетекшісі: Г.Т. Бекова.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 3 бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімі 195 атаудан тұрады. Жұмыстың көлемі 101 беттен тұратын компьютерлік мәтіннен, оның ішінде 12 суретті қамтиды.

1 ГЕЙЗЕНБЕРГТИҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ФЕРРОМАГНЕТИК ТЕНДЕУІ ЖӘНЕ КОМПЛЕКСТІ БАЙЛАНЫСҚАН ДИСПЕРСИЯЛЫ ЕМЕС ТЕНДЕУ

1.1 Ферромагнетиктердің бейсызықты солитондық модельдеріндегі негізгі теориялық зерттеулерге шолу

Бұл диссертация магниттелу динамикасының классикалық және кванттық теңдеулерінің солитондарын сипаттауға арналған. Алайда, кейбір нәтижелерді жартылай кванттық терминдермен түсіндіру үшін, сәйкес магнетиктерді кванттық тұрғыдан қарастыру қажет. Сондықтан, магнетиктердің бейсызықты қасиеттерін классикалық және кванттық теорияның өзара әрекеттесуін талқылаудан бастаймыз.

Магниттік құбылыстарды зерттеу тек танымдық тұрғыдан ғана емес, сонымен бірге материя құрылымының құпиясын ашуға мүмкіндік беретін маңызды ғылыми бағыт ретінде де қызықты. Айта кету керек, магнетизм ғылыми прогреске үлкен үлес қосты, яғни соңғы жылдары электроника саласында қолдану аясы артты. Бұл негізінен магниттік кристалдардың әр түрлі салаларда, әсіресе магниттердің бейсызықты қасиеттерін пайдаланатын электроника мен аса жоғары жиілікті техникада кеңінен қолданылуына байланысты. Мысалы, қазіргі компьютерлердің кейбір бөліктерінің жылдамдығы цилиндрлік магниттік домендердің динамикасына байланысты, олар негізінен ферромагниттік материалдардың бейсызықты құрылымдары болып табылады. Сондықтан осы тарауда біз магнетизм саласындағы негізгі теориялық зерттеулердегі соңғы жетістіктерін қарастырамыз.

Осы уақытқа дейін ферромагнетиктердегі сызықты тербелістер мен толқындардың қасиеттерін зерттеу бойынша айтарлықтай көлемді тәжірибелік және теориялық жұмыстар жүргізілді [16-23].

Магниттік солитондарды зерттеуде алынған негізгі теориялық нәтижелерді қарастырайық. Изотропты квази-бірөлшемді ферромагнетик үшін Ландау – Лифшиц (ЛЛ) теңдеулерін интегралдауда шашыраудың кері есебі әдісін қолдану мүмкіндігі алғаш рет [24, 25] қолданылған. $x \rightarrow \pm\infty$ кезінде магниттелудің біртекті асимптотикасы бар модельдің барлық нақты шешімдерін есептеу процедурасы тұжырымдалған [26].

Бір осьті ферромагнетиктің бір өлшемді ЛЛ теңдеуінің Лакс жұбы болатыны [27-30] жұмыстарында көрсетілді және нақты шешімдерді құру үшін жалпы интегралдау техникасының жеңілдетілген нұсқасы, полиномды тұйықтау әдісі ұсынылды. Бір осьті анизотропиясы бар ферромагнетик үшін шашыраудың кері әдісі есебінің классикалық нұсқасы [31, 32] тұжырымдалған, бұл $x \rightarrow \pm\infty$ кезінде біркелкі асимптотикасы бар барлық шешімдерді есептеуге мүмкіндік береді.

Магниттердің бейсызықты динамикасының теңдеулерін тікелей интегралдау арқылы магниттелудің оңашаланған толқынды көптеген нақты шешімдері табылды [33]. Олардың кейбіреулерін магнетондардың үлкен санының байланысқан күйі ретінде түсіндіруге болатыны көрсетілген. Мұндай зерттеулер

бейсызықты топтық қозулардың физикалық табиғатын түсінуде маңызды рөл атқарады және интегралды жүйелерді табуда нұсқаулық болып табылады.

«Жеңіл жазықтық» анизотропиясы бар ферромагнетик үшін Ландау-Лифшиц теңдеулерін тікелей интегралдау нәтижесінде анизотропия осі бойымен бағытталған тұрақты магнит өрісі болған жағдайда кеңістікте локализацияланған магниттелу толқындарының бірнеше түрлері болатыны анықталды. Белгілі бір критикалық мәннен төмен магнит өрісінде айналмалы толқындар, алгебралық және пульсирленген солитондар болады [34-37]. Өрістің жоғары мәні кезінде прецессиялық солитондар табылды [35, p. 2448].

Бұл жұмыстарда [38, 39] матрицалық Риман есебіне негізделген «жеңіл жазықтық» анизотропиясы бар ферромагнетиктің теңдеулерін интегралдау процедурасы ұсынылды. Математикалық қарапайым әдіс бейсызықты топтық қозулардың жаңа түрлерін зерттеуге мүмкіндік береді. Атап айтқанда, бұл әдіс анизотропия осі бойымен бағытталған сыртқы магнит өрісі болған кезде $x \rightarrow \pm\infty$ кезінде біртекті емес асимптотикалық магниттік қозуларды талдау үшін пайдаланылуы мүмкін.

Екі және үш өлшемді магниттелу толқындары ерекше назар аударуды қажет етеді, өйткені бұл жүйелердің интегралдану қасиеті өлшемдердің үлкен санына өткенде жоғалады. Шашыраудың кері есебі әдісінің классикалық нұсқасы өлшемдердің үлкен санына өткенде тиімсіз болады, дегенмен ол бір өлшемді емес магниттелу толқындарының кейбір жекелеген кластарын зерттеуге мүмкіндік береді. Мысалы, [40, 41] жұмыстарында цилиндрлік симметриялы магниттік қозулар аналитикалық сипатталған, ал [42, 43] жұмыстарда екі өлшемді солитон тәрізді прецессиялық толқындар мен изотропты ферро- және антиферромагнетиктердегі магниттік дисклинациялар табылған.

Қазіргі уақытта ақпаратты сақтау құралы ретінде жұқа ферромагниттік қабықшалар негізіндегі кері торларды қолдану олардың жазылу тығыздығын арттыру жолдарының бірі ретінде қарастырылуда [44]. Сонымен қатар, магниттік микро- және наноқұрылымдардың физикалық қасиеттерін зерттейтін электроникадағы жаңа бағыт – магнетикамен байланысты кері магниттік торлардағы спиндік толқындардың қозу спектрлерін зерттеудің маңызды аспектісін атап өткен жөн [45]. Мұндай объектілердегі бейсызықты құбылыстарды зерттеуге келетін болсақ, бұл бағытта жүргізілген жұмыстардың кейбірін ғана көрсетуге болады. Мысалы, [46-48] еңбектерінде магнитостатикалық толқынның үш магнонды ыдырау процесінің шегі зерттелген. Магнитостатикалық толқындардың үш магнондық ыдырау процестеріне тыйым салынған жиілік аймағында магнон кристалында ораушы солитондардың түзілу ерекшелігі де [49, 50] еңбектерінде зерттелді. Бұл жұмыстарда ферромагниттік пленкада периодтық құрылымның параметрлеріне тәуелді дисперсиясы бар бір ғана магнитостатикалық толқын таралады деген болжамға сүйене отырып, дисперсия және сызықты емес коэффициенттері анықталған бейсызықты Шредингер (БШ) теңдеуіне негізделген тәжірибелер мен сандық модельдеу нәтижелері ұсынылды.

Магниттік реттелген кристалдардағы бейсызықты толқындар мен солитондардың өзгеруін, яғни қатты қоздырылатын магнит күйлерінің

эволюциясын қарастырайық. Ол үшін магниттік кристалдардың макроскопиялық сипаттамасын қолданамыз және ферромагнетиктер үшін келесі бөлімдерде қарастырамыз.

1.2 Магниттік жүйелердің классикалық және кванттық модельдері

Ферромагнетиктердегі динамикалық процестерді зерттеу жарты ғасырдан астам уақыт бұрын басталды. Домен қабырғаларының динамикасына арналған алғашқы жұмыстан кейін [51] магниттердегі тербелістер мен толқындардың әр түрлі түрлеріне бірқатар зерттеулер жүргізілді. Бұл бөлім магниттелу динамикасының классикалық теңдеулерінің солитондарын сипаттауға арналған. Дегенмен, мұндай магниттік жүйелердің кванттық талдауын жиі қолданамыз және кейбір нәтижелерімізді жартылай кванттық терминдермен сипаттаймыз. Сондықтан, магниттік солитондардың макроскопиялық теориясының шеңберіндегі өте қарапайым кванттық магниттік жүйелердің қасиеттерін қысқаша қарастырамыз.

Магниттік реттелген магниттік кристалдарды үш негізгі топқа бөлуге болатыны белгілі: ферромагнетиктер, антиферромагнетиктер және ферримагнетиктер. Ферромагнетиктерге өтпелі металдар: темір, кобальт және никель; антиферромагнетиктерге өтпелі элементтердің оксидтері және олардың тұздары (FeO , CoO , CoF_2 , NiSO_4 және т.б.); ферримагнетиктерге күрделі тұздар ($\text{MnO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, $3\text{Y}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{Fe}_2\text{O}_3$ және т.б.) және басқалары сияқты өтпелі элементтердің қосылыстары болып табылады.

Ферромагнетиктер - бұл Кюри температурасынан төмен температурада иондардың магниттік моменттері бір-біріне параллель болатын қатты денелер. Нәтижесінде қатты денеде үлкен спонтанды магниттік моменті бар аймақтар (домендер) болады. Кюри температурасынан жоғары температурада ферромагнетик парамагниттік қасиетке ие болады. Ферромагниттік материалдар магниттерге қатты әсер етіп қана қоймайды (темірдің магниттерге тартылу сияқты), олар өз бетімен магниттеліне алады немесе тұрақты магнитке айналуы мүмкін.

Ферромагнетизмнің макроскопиялық теориясының негізгі болжамы магниттік кристалдың күйі магниттелу векторы \mathbf{M} арқылы ерекше сипатталады және осылайша ферромагнетиктің динамикасы мен кинетикасы оның магниттелуінің өзгеруімен анықталады.

Кеңістік пен уақытқа байланысты ферромагнетиктің магниттелуі $\mathbf{M}(x, t)$ Ландау-Лифшиц теңдеуінің шешімі болып табылады [52]

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\mu_0}{\hbar} \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{эф}} - \gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{M}_{\text{эф}}), \quad (1.1)$$

мұнда μ_0 – Бор магнетоны;

γ – релаксация тұрақтысы, ол \mathbf{M} векторының қозғалысының әлсіреуін анықтайды. Тиімді магнит өрісі $\mathbf{H}_{\text{эф}}$ магниттік кристалдық энергияның \mathbf{M} векторына қатысты вариациялық туындысына тең

$$\mathbf{H}_{\text{эф}} = \frac{\delta E}{\delta \mathbf{M}}.$$

Магниттік кристалдың E энергиясы \mathbf{M} және оның кеңістіктік туындыларының функционалдығы болып табылады деп есептеледі:

$$E = \int w \left\{ M, \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right\} d^3 x,$$

мұнда i, k – координат индекстері ($i, k = 1, 2, 3$). [53] жұмыста ферро- және антиферромагнетиктерге арналған функцияның әртүрлі нұсқалары егжей-тегжейлі талқыланады. Бұл теңдеу үш өлшемді кристалдың магниттік энергиясын береді. Екі және бір өлшемді кристалдар үшін

$$E = a \int w d^2 x, \quad E = a^2 \int w dx,$$

яғни, екі өлшемді немесе бір өлшемді кристалдарды қарастырған кезде сәйкесінше $d^3 x \rightarrow a d^2 x$ және $d^3 x \rightarrow a^2 dx$ алмастырулары пайдаланылады.

(1.1) теңдеуінде $\mathbf{M}^2 = \text{const}$ қозғалысының интегралы бар. Бұл тұжырым ферромагнетиктегі \mathbf{M} векторының ұзындығы оның тепе-теңдік сипаттамасы болып табылады деген болжамға сәйкес келеді. Негізгі күйде \mathbf{M} мәні өздігінен магниттелу деп аталатын $M_0 = 2\mu_0 S / a^3$, сәйкес келеді, мұнда μ_0 – Бор магнетоны, S - атомның спині, a^3 - кристалдың бірлік ұяшық көлемі (атомдық көлем).

Кванттық ферромагниттік теория қарастырылатын магниттік материалдың спиндік гамильтонианын тұжырымдаудан шығады. Магниттік материалдың кванттық моделі ретінде Гейзенбергтің алмасу гамильтоны бар локализацияланған электронды спиндер жүйесін қолданамыз

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq m} J_{nm} \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_m,$$

мұнда n және m - кристалдық тор түйіндерінің векторлық сандары;

\mathbf{S}_n - n -ші түйіннің спиндік операторы; ал

J_{nm} - алмасу интегралдары. Төменде тордағы ең жақын түйіндер арасындағы алмасу әрекетін ғана ескереміз. $J > 0$ жағдайында бір-біріне параллель \mathbf{S}_1 және \mathbf{S}_2 спиндер төмен энергиялы күйді орнатады, ал $J < 0$ кезінде спиндердің антипараллельді бағдарлануына байланысты антиферромагниттік болады. Алмасу интегралдарын оң деп есептесек, изотропты ферромагнетик моделін аламыз.

1.3 Гейзенбергтің ферромагнетик моделі

Магниттік құбылыстардың динамикасын қарастырудың жаңа тәсілі магниттелу векторының өзінің гироскопиялық күштері мен сыртқы өрістердің әсерінің қозғалысына негізделген [54]. 1935 жылы Л.Д. Ландау және Е.М. Лифшицтің «Phys. Zs. Sowjetunion 8, 153» журналында жарияланған мақаласында домен қабырғаларының резонансымен байланысты құбылыстарды түсіндіру үшін Ландау-Лифшиц теңдеуін ұсынды және бұл жұмыста тек магнетизм физикасының өз заманы үшін маңызды есептері шешіліп қана қоймай, сонымен қатар іс жүзінде реттелген спиндік жүйелер физикасына жаңа көзқарас тұжырымдалды.

Шашыраудың кері есебі әдісі арқылы интегралданатын классикалық бейсызқты дифференциалдық теңдеулердің бірі – Гейзенбергтің ферромагнетик моделі (ГФ) болып табылады:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx}, \quad (1.2)$$

мұнда $\mathbf{S}(x, t)$ векторы R^3 бірлік сферада жатыр, $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $\mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, « \times » векторлық көбейтіндіні, x, t сәйкес аргументтерге қатысты туындылар. Бұл модель қатты дене физикасында кездеседі және ол классикалық \vec{S} спинін сипаттайды.

Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуі гамильтондық түрде былай жазылады:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \{H, \vec{S}\},$$

мұндағы

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \right)^2 dx,$$

Гейзенбергтің ферромагнетик моделін нөлдік қисықтық шарты арқылы жазсақ

$$U(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} S, \quad V(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} S + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial S}{\partial x} S,$$

мұнда

$$S = \vec{S} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{a=1}^3 S_a \sigma_a,$$

$S^2 = I$ шартын қанағаттандыратын ізсіз эрмитті матрица, ал σ_a - Паули матрицасы. Шынында да, нөлдік қисықтық шарты

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0$$

$S^2 = I$ шартын ескеріп, Гейзенбергтің бастапқы ферромагниттік теңдеуіне эквивалентті теңдеуді аламыз

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2i} \left[S, \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right]$$

немесе

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] = 0. \quad (1.3)$$

Бұл теңдеу әдетте бір өлшемді изотропты Гейзенбергтің ферромагнетик моделі немесе изотропты Ландау-Лифшиц теңдеуі деп аталады. Гейзенбергтің ферромагнетик моделі бейсызықты дисперсиялық магниттік ортадағы спиндік толқындарының эволюциясын сипаттайды. Гейзенбергтің ферромагнетик моделі сипаттайтын бір өлшемді ферромагнетиктегі солитондарға көп көңіл бөлуі сыртқы магнит өрісі болмаған кезде теңдеудің интегралдануына байланысты. Егер жүйенің ерікті бастапқы қозуы шексіздікте белгілі бір шарттарды қанағаттандырса, (1.2) теңдеуінің шешімін кез-келген уақыт мезетінде табуға болатынын білдіреді. Бұл шарттар, атап айтқанда, солитондық шешімдерді қанағаттандырады.

Гейзенбергтің ферромагнетик моделінің бірнеше интегралданатын және интегралданбайтын жалпылаған редукцияларды бар. Мысалы, Ландау-Лифшиц теңдеуі, Ишимори теңдеуі және т.б. Гейзенбергтің ферромагнетик моделі физика мен математикада кеңінен қолданылады [55]. Дегенмен, спиндік толқындардың әр түрлі бейсызықты режимдерінде және математика үшін Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуі кейбір кеңейтулерді қажет етеді [56]. Әдетте әдебиетте осы талаптарды қанағаттандыру үшін бірнеше әдістер көрсетілген. Мысалы, біріншісі – жоғары ретті Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуін алу үшін бірнеше жоғары ретті дисперсия мүшелерін қосу әдісі [57]. Екінші әдіс - кейбір көп өлшемді кеңейтілімді құру. Бұл әдістермен интегралданатын және интегралдамайтын бірнеше Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеулері ұсынылды [58-61]. Осылайша, Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеулерінің толық интегралдылығы анықталғаннан бері олардың жалпылауын құруға көптеген әрекеттер жасалды. Келесі бөлімде жалпыланған Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуін қарастырамыз.

1.4 Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі

Қызықты интегралданатын спиндік модельдердің бірі – ферромагнетиктің бір өлшемді динамикасын сипаттайтын Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі және ол келесі түрде беріледі:

$$iA_t = \frac{1}{2k}[A, A_t]_x + \frac{i}{k^2}(\rho A)_x. \quad (1.4)$$

Мұнда $\sigma = \pm 1$, $k = const$,

$$A = \begin{pmatrix} A_3 & \sigma A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = I, \quad A^\pm = A_1 \pm iA_2, \quad \sigma(A_1^2 + A_2^2) + A_3^2 = 1$$

және

$$\rho = \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma k^2}{2} tr(A_t^2)} = \sqrt{1 - \sigma k^2 \mathbf{A}_t^2}, \quad \mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{A}^2 = 1.$$

Шашыраудың кері есебі әдісінің көмегімен (1.4) теңдеуінің интегралдануы жүйенің үйлесімділік шартымен байланысты

$$\Phi_x = U_1 \Phi, \quad (1.5)$$

$$\Phi_t = V_1 \Phi. \quad (1.6)$$

мұнда

$$U_1 = i(k - \lambda)A, \quad V_1 = \left[\frac{i(k - \lambda)}{4k\lambda} \rho A + \frac{(k - \lambda)}{2\lambda} AA_t \right].$$

1.5 Лакшманан (геометриялық) эквивалентті баламасы

Солитондық құбылыстарды, негізінен бейсызықты эволюция теңдеулері тілінде түсіндірудің әртүрлі тәсілдері [62-67] еңбектерінде қарастырылды. Абстракттілі геометриялық кескіндердің маңыздылығы солитондар теориясында кеңейту құрылымдары мен псевдопотенциалдардың болу маңыздылығы Уолквист пен Эстрабруктың еңбектерінен туындайды. Ламб [68] неғұрлым қарапайым геометриялық тұрғыдан эволюциялық теңдеулері мен айналмалы кеңістік қисықтарының қозғалысы арасындағы тығыз байланысты көрсетті. Герман, керісінше, бейсызықты теориядағы Лакс теңдеулерінің қарапайым Ли алгебралық сипатын көрсетіп, Ли теңдеуін қатты дене динамикалық теңдеуін, яғни Эйлер теңдеуін жалпылау ретінде қарастыруға болатындығын көрсетті.

Қатты денелердің айналмалы кеңістіктік қисықтар бойымен қозғалысы [69] жұмыста қарастырылды және қатты денелердің қозғалыс теңдеулерін зерттеу кезінде әртүрлі шешілетін бейсызықты теңдеулер және олармен байланысты псевдопотенциалдар, кеңейту құрылымдары және байланыс формалары табиғи түрде пайда болатыны көрсетілген. Бұл тәсіл солитон типті эволюция теңдеулерінің геометриялық және физикалық интерпретациясын қамтамасыз етеді.

Лакшманан (геометриялық) эквиваленттілігі ұғымын алғаш Лакшманан енгізген. Ол бірінші болып интегралданатын және интегралдамайтын бейсызықты дифференциалдық теңдеулер немесе спиндік жүйе мен бейсызықты дифференциалдық теңдеу арасындағы байланысты орнатты. Мысалы, Гейзенберг ферромагнетик теңдеулері немесе изотропты Ландау-Лифшиц

теңдеуін бір өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуіне түрлендіруге болады [70]:

$$iq_t + q_{xx} + 2\delta|q|^2 q = 0. \quad (1.7)$$

мұндағы $q(x,t)$ – өрістің комплексті функциясы, x,t - индекстері x және t бойынша дербес туындылар, i - жорамал бірлік, $\delta = \pm 1$.

Бұл теңдеу (1.7) шашыраудың кері есебі әдісі арқылы интегралданған алғашқы бейсызықты дербес дифференциалдық теңдеулердің бірі болып табылады.

Бұл түрлендіру, атап айтқанда, қатты дененің қисық бойымен қозғалысы мен дифференциалдық геометрия арасындағы байланыс негізінде \mathbf{e}_j базистік векторларының бірімен, атап айтқанда $S \equiv \mathbf{e}_1$ магниттелу векторын анықтауға негізделген.

Енді $\sigma=1$ жағдайы үшін Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуіне (1.4) Лакшмананды немесе геометриялық эквиваленті теңдеуді табайық. Ол үшін Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуін (1.2) векторлық түрде қайта жазамыз. Оның бірнеше эквивалентті векторлық (1.7)-(1.12) формалары бар:

а)

$$\mathbf{A}_t = \frac{1}{k}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_t)_x + \frac{1}{k^2}(\rho \mathbf{A})_x, \quad (1.7)$$

$$\rho_x = k\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_t \wedge \mathbf{A}_x). \quad (1.8)$$

ә)

$$\mathbf{A}_t = \frac{1}{k}\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_{xt} + \frac{1}{k^2}\rho \mathbf{A}_x, \quad (1.9)$$

$$\rho_x = k\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_t \wedge \mathbf{A}_x). \quad (1.10)$$

б)

$$\mathbf{A}_t = \frac{1}{k}\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_{xt} + \frac{1}{k}\partial_x^{-1}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_t \wedge \mathbf{A}_x)]\mathbf{A}. \quad (1.11)$$

в)

$$\mathbf{A}_t = \frac{1}{k}\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_{xt} \pm \frac{1}{k^2}\sqrt{1 - \sigma k^2 \mathbf{A}_t^2} \mathbf{A}_x. \quad (1.12)$$

Енді үш өлшемді евклидтік кеңістіктегі екі өлшемді тегіс бетті, \mathbf{e}_k бірлік векторларымен берілген R^3 қисығын қарастырайық. Бұл векторлар Френе-Серре теңдеуіне бағынады:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_x = C \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_t = G \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

мұнда $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ және \mathbf{e}_3 – сәйкесінше қисыққа жанама, қисыққа нормальды және бинормальды бірлік векторлары; ал

x – қисық параметрінің доға ұзындығы. C және G матрицалары:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Оның антисимметриялық екенін және C матрицасы κ және τ коэффициенттерімен анықталады, олар сәйкесінше қисықтың қисықтығы мен бұралым деп аталады, γ_j ($j = 1, 2, 3$) - G матрицасының компоненттері.

Егер түзудің қисықтығы оның барлық нүктелерінде нөлге тең болса, онда сызық түзу болады. Нөлдік бұралым қисығы – жазық қисық болады.

Қисықтың қисықтық κ және бұралым τ коэффициенттері келесі (1.15) формулалармен берілген:

$$\kappa = \sqrt{\mathbf{e}_{1x}^2}, \quad \tau = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_{1x} \wedge \mathbf{e}_{1xx})}{\mathbf{e}_{1x}^2}. \quad (1.15)$$

Теңдеулердің үйлесімділігінің келесі шарттарынан

$$\mathbf{e}_{jxt} = \mathbf{e}_{jyx}$$

сәйкесінше

$$C_t - G_x + [C, G] = 0 \quad (1.16)$$

немесе компоненттері арқылы

$$\kappa_t = \gamma_{3x} + \tau\gamma_2, \quad (1.17)$$

$$\tau_t = \gamma_{1x} - \kappa\gamma_2, \quad (1.18)$$

$$\gamma_{2x} = \tau\gamma_3 - \kappa\gamma_1. \quad (1.19)$$

Енді келесі сәйкестендіруді жасаймыз:

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_1. \quad (1.20)$$

Онда

$$\kappa^2 = \mathbf{A}_x^2, \quad (1.21)$$

$$\tau = \frac{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_x \wedge \mathbf{A}_{xx})}{\mathbf{A}_x^2} \quad (1.22)$$

және

$$\gamma_1 = \frac{\kappa \rho \tau + k \kappa_{xt}}{\kappa k (k + \tau)}, \quad (1.23)$$

$$\gamma_2 = -\frac{\kappa_t}{k}, \quad (1.24)$$

$$\gamma_3 = \frac{\kappa \rho}{k^2} - \frac{\kappa \rho \tau + k \kappa_{xt}}{k^2 (k + \tau)}, \quad (1.25)$$

мұнда $\rho = 1/\kappa$ - қисықтық радиусы. Қисықтың κ қисықтығы мен τ бұралуы теңдеуі

$$\kappa_t = \left[\frac{\kappa \rho}{k^2} - \frac{\kappa \rho \tau + k \kappa_{xt}}{k^2 (k + \tau)} \right]_x - \frac{\tau \kappa_t}{k}, \quad (1.26)$$

$$\tau_t = \left[\frac{\kappa \rho \tau + k \kappa_{xt}}{\kappa k (k + \tau)} \right]_x + \frac{(\kappa^2)_t}{2k}. \quad (1.27)$$

Енді жаңа v функциясын енгізейік

$$v = k \int \frac{\gamma_3}{\kappa} dt. \quad (1.28)$$

Бұдан κ және v функциялары келесі теңдеулердің шешімі екенін тексеру қиын емес

$$\kappa_{xt} = \kappa v_x v_t - 0.5 \partial_x^{-1} [(|q|^2)_t] \kappa, \quad (1.29)$$

$$v_{sy} = -\frac{\kappa_s v_y}{\kappa_y v_s}. \quad (1.30)$$

Әрі қарай жаңа $q(x, t)$ функцияны енгіземіз

$$q = \kappa e^{iv}. \quad (1.31)$$

Нәтижесінде q функциясы келесі теңдеуді қанағаттандырады

$$q_{xt} + 0.5\partial_x^{-1}[(|q|^2)_t]q = 0. \quad (1.32)$$

Енді осы теңдеуді келесі түрде қайта жазайық

$$q_{xt} - \rho q = 0, \quad (1.33)$$

$$\rho_x + 0.5(|q|^2)_t = 0. \quad (1.34)$$

Яғни, (1.33)-(1.34) теңдеулер жүйесі бұл фокустаушы комплексті-байланысқан дисперсиялы емес (КБД) жүйе [71, 72] немесе Конно-Онно теңдеуі деп аталады. Осылайша Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі (1.2) мен КБД (1.33)-(1.34) теңдеуі геометриялық тұрғыдан бір-біріне эквивалентті екенін дәлелдедік. Соңында, (1.33)-(1.34)-ден мынаны аламыз

$$\rho^2 + \sigma |q_t|^2 = const \quad (1.35)$$

немесе ыңғайлы болуы үшін келесі түрде жазайық

$$\rho^2 + \sigma |q_t|^2 = 1. \quad (1.36)$$

Онда

$$\rho = \pm \sqrt{1 - \sigma |q_t|^2}. \quad (1.37)$$

Соңында, (1.33)-(1.34) теңдеуінің орнына

$$q_{xt} \mp \sqrt{1 - \sigma |q_t|^2} q = 0. \quad (1.38)$$

Бір қарағанда (1.33)-(1.34) теңдеулер жүйесінде q және ρ екі тәуелді айнымалыдан тұрады. Бірақ, (1.36) теңдеуінен бір ғана $q(x, t)$ айнымалысына тәуелді екенін көреміз.

1.6 Калибровті эквивалентті баламасы

Алдыңғы бөлімде Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі (1.2) мен КБД теңдеуі (1.33)-(1.34) Лакшманан немесе геометриялық тұрғыдан бір-біріне эквивалентті екендігі дәлелденді. Енді бұл теңдеулердің бір-біріне калибровті эквивалентті екенін көрсетейік. Осы эквиваленттердің арасындағы айырмашылықты бірден атап өтейік. Калибровті эквиваленттілік тек Лакс ұсынысы бар бейсызықты дифференциалдық теңдеулер үшін жарамды, өйткені екі бейсызықты теңдеулердің Лакс ұсынысымен эквиваленттілігі тікелей орнатылады. Екінші жағынан, Лакшмананның эквиваленттігі интегралданатын

және интегралдамайтын бейсызықты дифференциалдық теңдеулер үшін де жұмыс істейді және оның қолданылу аясының анықтамасы бойынша спиндік жүйелер мен белгілі Шредингер типті бейсызықты дифференциалдық теңдеулер арасындағы эквивалентті орнатумен шектеледі. Дегенмен, тіпті интегралданатын бейсызықты дифференциалдық теңдеулер үшін де Лакшмананның эквиваленттілігі сәйкес бейсызықты дифференциалдық теңдеудің Лакс ұсынысы білуді қажет етпейді [73].

Калибровті түрлендіруді қарастырайық $\Phi = g^{-1}\Psi$, мұндағы $g = \Psi|_{\lambda=k}$. Сонда Ψ функциясы келесі теңдеулер жүйесінің қанағаттандыратынын оңай көрсетуге болады:

$$\Psi_x = U_2 \Psi, \quad (1.39)$$

$$\Psi_t = V_2 \Psi, \quad (1.40)$$

мұнда

$$U_2 = -i\lambda\sigma_3 + 0.5 \begin{pmatrix} 0 & -q \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{i}{4\lambda} \left[\rho\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & q_t \\ \bar{q}_t & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (1.41)$$

Теңдеулерінің (1.39)-(1.40) үйлесімділік шарты КБД (1.33)-(1.34) теңдеуіне баламалы. Бұл Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі (1.4) мен КБД (1.33)-(1.34) теңдеуі арасында калибровті эквиваленттік бар екенін білдіреді.

Байланысты дисперсиялысыз теңдеулер (нақты және күрделі) маңызды жұмыстардан бастап белсенді түрде зерттеліп келе жатқан интегралданатын жүйелер [74, 75]. Бұл теңдеулер тәуелсіз қызығушылық тудырады және қысқа импульстік теңдеулерді зерттеуде маңызды рөл атқарады [76-82].

1.7 Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуіне қатысты интегралдық беттер

Бұл бөлімшеде Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі (1.4) мен беттердің дифференциалдық геометриясы арасындағы байланысты орнатамыз. Ол үшін алдымен ішкі геометрия туындайтын ең қарапайым объектілер болып табылатын беттер теориясынан қысқаша теориялық мәлімет берілген [83]. Енді үш өлшемді кеңістіктегі екі өлшемді бетті қарастырайық. Бет $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, t)$ арқылы параметрлік түрде берілсін, мұндағы x, t беттің координаталары. Енді бетке қайта оралайық. Беттің бірінші квадраттық формасы төмендегідей берілген

$$I = ds^2 = d\mathbf{r}^2 = E dx^2 + 2F dx dt + G dt^2,$$

мұнда

$$E = \mathbf{r}_x^2, \quad F = (\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_t), \quad G = \mathbf{r}_t^2.$$

Бірінші квадраттық форма негізінен беттердегі шексіз кіші доғаларды өлшеу үшін пайдалы. Беттің екінші квадраттық формасы келесідей түрде анықтаймыз

$$II = - (d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = Ldx^2 + 2Mdxdt + Ndt^2,$$

мұнда

$$L = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{xx}), \quad M = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{xt}), \quad N = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{tt}),$$

ал беттік нормаль векторы келесідей анықталады

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t|}.$$

Үшінші негізгі квадраттық форманы анықтайық

$$III = d\mathbf{n}^2 = edx^2 + 2fdxdt + gdt^2,$$

мұнда

$$e(x,t) = \mathbf{n}_x^2, \quad f(x,t) = (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_t), \quad g(x,t) = \mathbf{n}_t^2.$$

Негізгі квадраттық форманың геометриялық мағынасын берейік:

– бірінші квадраттық форма - беттегі екі шексіз жақын нүктенің ара қашықтығының квадратын сипаттайды;

– екінші квадраттық форма - бұл нүктелердің бірінен екінші нүктедегі жанама жазықтыққа дейінгі қашықтықты сипаттайды;

– үшінші квадраттық пішін - бұл нүктелердегі жанама жазықтықтар арасындағы бұрыштың квадратын сипаттайды.

Үшінші квадраттық форма беттер теориясында бірінші екеуіне қарағанда, көп қолданылмайды. Себебі, үшінші квадраттық форманы алгебралық түрде алғашқы екі квадраттық формадан есептеу арқылы алуға болады

$$III = 2H \cdot II - K \cdot I,$$

мұнда III – үшінші квадраттық форма;

II, I – сәйкесінше беттің екінші және бірінші квадраттық формалары;

K – беттің Гаусс қисықтығы;

H – беттің орташа қисықтығы.

Қазіргі солитон геометриясында негізгі квадраттық формалардың әр түрлі жағдайлары қарастырылады. Біз мұнда жиі кездесетін ерекше жағдайды қарастырамыз.

1.7.1 1-жағдай: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{r}_x$

Келесі сәйкестендіруді қарастырайық

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{r}_x, \quad (1.42)$$

мұнда $\mathbf{r}(x,t)$ – бетке енгізілген қисықтық радиус векторы. \mathbf{r} тұрғысынан жалпыланған Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуін (1.2) келесідей түрде түрлендірейік

$$\mathbf{r}_t = \frac{1}{k} \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_{xt} + \frac{1}{k^2} \rho \mathbf{r}_x, \quad (1.43)$$

$$\rho_x = k \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_t \wedge \mathbf{A}_x). \quad (1.44)$$

немесе төмендегідей түрде жазайық

$$\mathbf{r}_{xt} + k \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t = 0. \quad (1.45)$$

Осы теңдеудің $k = -1$ болған жағдайы [72, р. 63] еңбегінде алынған және егжей-тегжейлі зерттелген. Интегралданатын жүйе ретінде (1.43)-(1.44) теңдеуі келесі Лакс жұбын қабылдайды

$$F_x = 0.5i(k - \lambda)r_x F = U_3 F, \quad (1.46)$$

$$F_t = \left[\frac{i(k - \lambda)}{2k\lambda} \rho r_x + \frac{(k - \lambda)}{2\lambda} r_x r_{xt} \right] F = V_3 F. \quad (1.47)$$

Лакс жұбынан

$$i r_{xt} = \frac{1}{4k} [r_x, r_{xt}]_x + \frac{i}{4k^2} \rho r_{xx}, \quad (1.48)$$

$$\rho_x = -iktr(r_x \cdot [r_{xx}, r_{xt}]). \quad (1.49)$$

Бұл (1.43)-(1.44) теңдеуінің матрицалық түрі ғана. Енді

$$\rho = k \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_t = k \cos \theta, \quad (1.50)$$

сондықтан θ - \mathbf{r}_x және \mathbf{r}_t векторлары арасындағы бұрышты білдіреді. Ыңғайлы болу үшін $k = 1$ деп есептейміз және $\sigma = 1$ жағдайында (1.36) формуладан

$$\rho = \cos \theta, \quad q_s = \sin \theta e^{-i\omega}, \quad (1.51)$$

мұнда θ және ω кейбір нақты функциялар. Бұл формулалардан

$$q = (\theta_x - i\omega_x \tan \theta)e^{-i\omega}. \quad (1.52)$$

Осылайша, (1.39)-(1.40) үшін Лакс жұбының өрнектерін аламыз

$$U_2 = -i\lambda\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\theta_x - i\omega_x \tan \theta)e^{-i\omega} \\ \frac{1}{2}(\theta_x + i\omega_x \tan \theta)e^{i\omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

$$V_2 = \frac{i}{4\lambda} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\omega} \\ \sin \theta e^{i\omega} & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Біздің жағдайымыз үшін беттің бірінші және екінші квадраттық формалары келесі формулалармен берілген

$$I = dx^2 + 2\cos \theta dxdt + dt^2, \quad (1.55)$$

$$II = (\tan \theta)\omega_x dx^2 + 2\sin \theta dxdt + (\sin \theta)\omega_t dt^2. \quad (1.56)$$

Енді Гаусс-Вейнгартен бетінің теңдеулерін жаза аламыз

$$\mathbf{r}_{xx} = (\cot \theta)\theta_x \mathbf{r}_x - (\csc \theta)\theta_x \mathbf{r}_t - (\tan \theta)\omega_x \mathbf{N}, \quad (1.57)$$

$$\mathbf{r}_{xt} = \sin \theta \mathbf{N}, \quad (1.58)$$

$$\mathbf{r}_{tt} = -(\csc \theta)\theta_t \mathbf{r}_x + (\cot \theta)\theta_t \mathbf{r}_t + (\sin \theta)\omega_t \mathbf{N}, \quad (1.59)$$

$$\mathbf{N}_x = (\cot \theta + \csc \theta \sec \theta \omega_x) \mathbf{r}_x - (\csc \theta \omega_x + \csc \theta) \mathbf{r}_t, \quad (1.60)$$

$$\mathbf{N}_t = -(\csc \theta - \cot \theta \omega_t) \mathbf{r}_x + (\cot \theta + \csc \theta \omega_t) \mathbf{r}_t. \quad (1.61)$$

Бұл теңдеулердің үйлесімділік шарттары Майнард-Кодацци теңдеуін береді

$$(\omega_t \cos \theta)_x = \left(\frac{\omega_x}{\cos \theta} \right)_t. \quad (1.62)$$

Сонымен қатар, беттің Гаусс қисықтығының түрі

$$K = -\frac{(\tan \theta)\omega_x \omega_t + \sin \theta}{\sin \theta}. \quad (1.63)$$

Эгрегий теоремасының Лиувилл-Белтрами формасынан келесі маңызды формула шығады және оның түрі

$$\theta_{,x} - \sin \theta - (\tan \theta) \omega_x \omega_t = 0. \quad (1.64)$$

Беттің радиус векторын компоненттер арқылы жазайық

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \quad (1.65)$$

немесе матрицалық түрде

$$r = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3. \quad (1.66)$$

Енді жаңа үш матрицасын келесі түрде енгіземіз

$$T = \Phi^{-1} e_3 \Phi, \quad N = \Phi^{-1} e_2 \Phi, \quad B = \Phi^{-1} e_1 \Phi, \quad (1.67)$$

мұнда

$$e_j = \frac{1}{2i} \sigma_j. \quad (1.68)$$

Бұл келесі белгілі формуладан туындайды

$$r_x = \Phi^{-1} U_\lambda \Phi \Big|_{\lambda=1}, \quad (1.69)$$

$$r_t = \Phi^{-1} V_\lambda \Phi \Big|_{\lambda=1}. \quad (1.70)$$

Осылайша,

$$r_x = \Phi^{-1} e_3 \Phi = T, \quad (1.71)$$

$$r_t = (\cos \theta) T + (\sin \theta \cos \omega) N + (\sin \theta \sin \omega) B, \quad (1.72)$$

мұнда x қисықтық доғасының ұзындығының рөлін атқарады. Бұл теңдеулер бізге \mathbf{r} радиус векторының келесі теңдеуін береді:

$$\mathbf{r}_t = \rho \mathbf{r}_x + \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_{x,t}. \quad (1.73)$$

Біраз түрлендіруден кейін ол жалпыланған Гейзенбергтің ферромагнетик (1.45) теңдеуінің r -түріне сәйкес келеді. Онда

$$\mathbf{r}_t^2 = \mathbf{r}_x^2 = 1 \quad (1.74)$$

немесе матрицалық түрде

$$r_t^2 = r_x^2 = I. \quad (1.75)$$

1.7.2 2-жағдай: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{r}_t$

Енді сәйкестендірудің басқа түрін қарастырайық

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{r}_t \quad (1.76)$$

мұнда $\mathbf{r}(x, t)$ - бетке енгізілген қисықтың радиус векторы, ал

t - қисықтың доға ұзындығының параметрі. Сонда жалпыланған Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуі (1.9)-(1.10) түрі келесі түрде жазуға болады

$$\mathbf{r}_{tt} = k^{-1} \mathbf{r}_t \wedge \mathbf{r}_{xt} + k^{-2} \rho \mathbf{r}_{xt}, \quad (1.77)$$

$$\rho_x = k \mathbf{r}_t \cdot (\mathbf{r}_{tt} \wedge \mathbf{r}_{xt}). \quad (1.78)$$

Бұл теңдеу R^3 кейбір интегралдық бетті анықтайды. (1.77)-(1.78) теңдеуі келесі Лакс жұбымен интегралданады

$$F_x = 0.5i(k - \lambda) r_t F = U_4 F, \quad (1.79)$$

$$F_t = \left[\frac{i(k - \lambda)}{2k\lambda} \rho r_t + \frac{(k - \lambda)}{2\lambda} r_t r_{tt} \right] F = V_4 F. \quad (1.80)$$

(1.79)-(1.80) теңдеулері үшін үйлесімділік шарты келесідей түрде

$$i r_{tt} = 0.5k^{-1} [r_t, r_{tt}]_x + ik^{-2} \rho r_{xt}, \quad (1.81)$$

$$\rho_x = -0.5iktr(r_t \cdot [r_{xt}, r_{tt}]). \quad (1.82)$$

Бұл (1.77)-(1.78) теңдеулерінің матрицалық түрі ғана.

Сонымен, Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделі (1.4) мен КБД емес жүйесі арасында байланыс орнатылды, яғни Конно-Ооно теңдеуі және Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуіне геометриялық және калибровті эквивалентті екендігі анықталды.

1.8 Индукцияланған Фокас-Ленеллс теңдеуінің қисықтарының интегралдық қозғалыстары

Әртүрлі бейсызықты жүйелердің ішінде бейсызықты Шредингер типті теңдеу оптикалық талшықтардағы жарық импульстарының бейсызықты таралуын модельдеу үшін кеңінен қолданылатын интегралданатын бейсызықты теңдеулердің бірі болып табылады. Бейсызықты Шредингер теңдеуінің әртүрлі

нұсқалары бойынша көптеген зерттеулер бар. Олардың бірін Фокас және Ленеллс ұсынған. Алғаш рет Фокас-Ленеллс теңдеуі сызықты және бейсызықты жоғары ретті оптикалық әсерлер қарастырылған кезде бір режимді кварцты оптикалық талшық арқылы фемтосекундтық импульстердің таралуын сипаттайтын модель ретінде алынды. Осы уақытқа дейін зерттеулер бигамильтондық құрылымға, сақталу заңдарына, Лакс жұбына, солитон шешімдеріне, кері шашырау түрлендіруіне, Дарбу түрлендіруіне, бейсызықты Хиротаның әдісіне және т.б. бағытталған. Бір қызығы, Фокас-Ленеллс теңдеуінің сызықты мен Шредингер теңдеуінен айырмашылығы бейсызықты мүшесінің таңбасын өзгертпей, ашық және күңгірт солитон қабылдайды.

Фокас-Ленеллс теңдеуінің тағы бір ерекшелігі, ол Камасса-Холм теңдеуінің Кортевег-де Фриз теңдеуі арасындағы байланысы сияқты, бейсызықты Шредингер теңдеуімен байланысы интегралдық иерархияның бірінші теріс ағынына сәйкес келеді.

Бейсызықты Шредингер теңдеуі және Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуі калибровті эквивалентті екені белгілі. Бұл теңдеулер физиканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Енді оптикалық талшықтардағы ультра қысқа бейсызықты жарық импульстерінің таралуын сипаттайтын Фокас-Ленеллс теңдеуін қарастырайық:

$$iq_{xt} - iq_{xx} + 2q_x - \delta |q|^2 q_x + iq = 0, \quad (1.82)$$

$$iq_{xt} - iq_{xx} + 2q_x - \delta |q|^2 q_x + iq = 0, \quad (1.83)$$

мұндағы $q(x,t)$ – өрістің комплексті функциясы, x,t - индекстері x және t бойынша дербес туындылар, i - жорамал бірлік. Сонымен қатар, $r = \delta \bar{q}$, мұнда \bar{q} түйіндес, $\delta = \pm 1, \delta = 1$ кезінде өзіндік фокустау және $\delta = -1$ кезінде өздігінен дефокустау.

Фокас-Ленеллс теңдеуінің Лакс жұбы

$$\Phi_x = U_3 \Phi, \quad (1.84)$$

$$\Phi_t = V_3 \Phi, \quad (1.85)$$

мұндағы λ - спектрлік параметр, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ және U_3 және V_3 матрицалық операторлары келесідей берілген

$$U_3 = -i\lambda^2 \sigma_3 + \lambda Q,$$

$$V_3 = -i\lambda^2 \sigma_3 + \lambda Q + V_0 + \frac{1}{\lambda} V_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2} \sigma_3.$$

мұнда

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ r_x & 0 \end{pmatrix}, V_0 = i\sigma_3 - \frac{iqr}{2}\sigma_3, V_{-1} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Келесі бір Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуіне тоқталайық. Бұл теңдеуінің матрицалық түрі келесідей болсын:

$$iA_t + \frac{\beta}{2}[A, A_{xx} - A_{xt}] + i(\beta^2 - 1)A_x = 0, \quad (1.86)$$

мұндағы $A - A^2 = 1$ шартын қанағаттандыратын $A = (A_1, A_2, A_3)$ спин векторының матрицалық аналогы болып табылатын спиндік матрица. x, t индекстері x және t бойынша дербес туындылар, i - комплексті сан, ал тік жақша коммутаторды білдіреді.

Берілген теңдеудің Лакс жұбы

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U_4 \Phi, \\ \Psi_t &= V_4 \Phi, \end{aligned}$$

мұндағы $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$, λ - спектрлік параметр және U_4 және V_4 матрицалары

$$\begin{aligned} U_4 &= -i(\lambda^2 - \lambda_0^2)A + \frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0}AA_x, \\ V_4 &= -i\left(\lambda^2 - \lambda_0^2 + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda_0^2}\right)A + \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)AA_x + \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda} - \frac{1}{2}\right)AA_t. \end{aligned}$$

Енді Фокас-Ленеллс және Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуіне (1.86) $\delta = -1$ байланыстыратын бірнеше маңызды формулаларды жазайық:

$$A_x = 2\lambda g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ \bar{q}_x & 0 \end{pmatrix} g,$$

мұндағы $g(x, t)$ - өлшемі 2×2 матрицалық функциясы және $\bar{q} - q$ функциясының түйіндесі.

$$\begin{aligned} A_t &= A_x + \frac{i}{\lambda} g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix} g, \\ A_x^2 &= 4\lambda^2 |q_x|^2 I, \end{aligned}$$

мұндағы I - бірлік матрица. Сонымен қатар, зерттелетін Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуіне (1.86) теңдеуін әртүрлі формада қайта жазуға болады. A спиндік матрицасының компоненттері келесідей түрде болады

$$\begin{aligned} iA_{3t} + \frac{\beta}{2}(A^-A_{xx}^+ - A^-A_{xt}^+ - A_{xx}^-A^+ + A_{xt}^-A^+) + i(\beta^2 - 1)A_{3x} &= 0, \\ iA_t^- - \beta(A^-A_{3xx} - A^-A_{3xt} - A_3A_{xx}^- + A_3A_{xt}^-) + i(\beta^2 - 1)A_x^- &= 0, \\ iA_t^+ + \beta(A^+A_{3xx} - A^+A_{3xt} - A_3A_{xx}^+ + A_3A_{xt}^+) + i(\beta^2 - 1)A_x^+ &= 0, \end{aligned}$$

немесе A спин векторының компоненттері:

$$\begin{aligned} A_{1t} + \beta(A_2A_{3xx} - A_{2xx}A_3 - A_2A_{3xt} + A_{2xt}A_3) + (\beta^2 - 1)A_{1x} &= 0, \\ A_{2t} + \beta(A_3A_{1xx} - A_{3xx}A_1 - A_3A_{1xt} + A_{3xt}A_1) + (\beta^2 - 1)A_{2x} &= 0, \\ A_{3t} + \beta(A_1A_{2xx} - A_{1xx}A_2 - A_1A_{2xt} + A_{1xt}A_2) + (\beta^2 - 1)A_{3x} &= 0. \end{aligned}$$

Спин векторының бұрыштық параметрленуін қарастырайық

$$A^+ = \sin \theta e^{i\varphi}, \quad A^- = \sin \theta e^{-i\varphi}, \quad A_3 = \cos \theta.$$

Содан кейін Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі (1.86) (θ, ϕ) параметрлері арқылы көрсетуге болады:

$$\begin{aligned} \theta_t &= \beta(\varphi_{xx} \sin \theta + 2\varphi_x \theta_x \cos \theta - \varphi_{xt} \sin \theta - \varphi_x \theta_t \cos \theta - \theta_x \varphi_t \cos \theta) - (\beta^2 - 1)\theta_x, \\ \phi_t &= \beta \left(\frac{\theta_{xt}}{\sin \theta} - \frac{\theta_{xx}}{\sin \theta} + \varphi_x^2 \cos \theta - \varphi_x \varphi_t \cos \theta \right) - (\beta^2 - 1)\varphi_x. \end{aligned}$$

Келесі түрлендіру енгізейік

$$\omega = \frac{A^+}{1 + A_3}.$$

Осылайша, Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуінің (1.86) ω -қа қатысты келесі формасын аламыз:

$$i\omega_t - \beta\omega_{xx} + \beta\omega_{xt} + i(\beta^2 - 1)\omega_x = \frac{2\beta\bar{\omega}(\omega_x\omega_t - \omega_x^2)}{1 + |\omega|^2}.$$

Спин векторының (матрицаның) келесі белгілі параметрін қарастырайық. Векторлық түрдегі теңдеу (1.86) келесідей көрінеді:

$$\mathbf{A}_t + \beta(\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_{xx} - \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_{xt}) + (\beta^2 - 1)\mathbf{A}_x = 0,$$

мұндағы \wedge - векторлық көбейтінді.

Енді екі өлшемді Фокас-Ленеллс теңдеуінің спиндік жүйесін құрастырайық. Ол үшін алдымен осы жүйе үшін Лакс көрінісін құру керек.

Екі өлшемді Фокас-Ленеллс теңдеуіне тоқталайық

$$iq_{xt} - iq_{xy} + 2q_x - q_x q r + iq = 0, \quad (1.87)$$

$$ir_{xt} - ir_{xy} - 2r_x + r_x r q + ir = 0. \quad (1.88)$$

Оның Лакс көрінісі келесідей болады:

$$\Psi_x = (-i\lambda^2 \sigma_3 + \lambda Q)\Psi,$$

$$\Psi_t = \Psi_y + (W_0 + \frac{1}{\lambda} W_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2} \sigma_3)\Psi,$$

мұнда

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ r_x & 0 \end{pmatrix}, \quad W_0 = i\sigma_3 - \frac{iqr}{2}\sigma_3, \quad W_{-1} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}.$$

Енді екі өлшемді Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуінің (1.86) Лакс жұбын табуын жалғастырайық. Ол үшін келесі калибровті түрлендіруді жасайық:

$$\Phi = g^{-1}\Psi, \quad g = \Psi|_{\lambda=\lambda_0},$$

мұндағы $g(x, t)$ – калибровті түрлендірудің 2×2 унитарлы матрицасы.

x және t аргументтеріне қатысты Φ векторлық функциясының туындыларын табамыз:

$$\Phi_x = (g^{-1}\Psi_x - g^{-1}g_x g^{-1})\Psi = U'\Phi = (U - U_0)\Phi, \quad (1.89)$$

$$\Phi_t = (g^{-1}\Psi_t - g^{-1}g_t g^{-1})\Psi = W'\Phi = (W - W_0)\Phi. \quad (1.90)$$

мұнда

$$U_0(x, t) = -i\lambda_0^2 \sigma_3 + \lambda_0 Q,$$

$$W_0(x, t) = W_1 + \frac{1}{\lambda_0} W_{-1} - \frac{i}{4\lambda_0^2} \sigma_3.$$

$g^{-1}\sigma_3g = A$, екені белгілі, мұндағы A - спин матрицасы, ол $A^2 = 1$ шартын қанағаттандыратын $A = (A_1, A_2, A_3)$ спин векторының матрицалық аналогы болып табылады.

Кейбір күрделі есептеулер мен түрлендірулерден кейін қажетті спиндік жүйенің шешімдері мен (1.89) және (1.90) теңдеулер жүйесі арасындағы байланысты келесі түрде аламыз:

$$g^{-1}Qg = \frac{1}{2\lambda_0} AA_x, \quad g^{-1}W_{-1}g = \frac{\lambda_0}{2}(AA_t - AA_y).$$

Осылайша, екі өлшемді Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуінің жаңа Лакс ұсынысын аламыз:

$$\Phi_x = U'\Phi, \quad (1.91)$$

$$\Phi_t = \Phi_y + W'\Phi, \quad (1.92)$$

мұнда

$$U' = -i(\lambda^2 - \lambda_0^2)A + \frac{(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0} AA_x,$$

$$V' = \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{1}{2}\right) AA_t - \left(\frac{\lambda}{2\lambda_0} - \frac{1}{2}\right) AA_y - \frac{i}{4} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right) A.$$

(1.91) және (1.92) айқас туынды арқылы үйлесімділік шартын аламыз

$$U'_t - U'_y - W'_x + [U', W'] = 0.$$

Үйлесімділік шартынан келесі теңдеуді аламыз

$$i(A_t - A_y + \frac{1}{4\lambda_0^4} A_x) + \frac{1}{4\lambda_0^2} [A, A_{xy} - A_{xt}] = 0.$$

Спиндік жүйенің компоненттерде төмендегідей

$$i(A_{3t} - A_{3y} + \frac{1}{4\lambda_0^4} A_{3x}) + \frac{1}{4\lambda_0^2} (A^- A_{xy}^+ - A^+ A_{xy}^- - A_{xt}^+ A^- + A_{xt}^- A^+) = 0,$$

$$i(A_t^- - A_y^- + \frac{1}{4\lambda_0^4} A_x^-) + \frac{1}{2\lambda_0^2} (A_3 A_{xy}^- - A^- A_{3xy} - A_3 A_{xt}^- + A^- A_{3xt}) = 0,$$

$$i(A_t^+ - A_y^+ + \frac{1}{4\lambda_0^4} A_x^+) + \frac{1}{2\lambda_0^2} (A^+ A_{3xy} - A_3 A_{xy}^+ - A^+ A_{3xt} + A_3 A_{xt}^+) = 0,$$

Бұл теңдеуді кері қайта жазайық

$$i(A_t - A_y + \beta^2 A_x) + \frac{\beta}{2}[A, A_{xy} - A_{xt}] = 0, \quad (1.93)$$

мұнда $\beta = 1 / 2\lambda_0^2$.

Сонымен, екі өлшемді Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуін (1.93) алдық және енді қисықтардың дифференциалдық геометриясы мен Фокас-Ленеллс спиндік жүйесі арасындағы байланысты орнатамыз.

Ол үшін Лакшманан ұсынған геометриялық тәсілді қайта қолданайық. x және t координаталары бар R^3 үш өлшемді евклид кеңістігіндегі қисық сызықты қарастырайық. Бұл қисық \mathbf{e}_k базистік векторлары арқылы берілген және базистік векторлар келесі теңдеулерді қанағаттандырады:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_x = C \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_t = G \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

мұнда \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 және \mathbf{e}_3 қисықтың жанама, бас нормальды және бинормальды бірлік векторлары, $x - t$ уақыттағы қисық доғасының ұзындығы және $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1$. C және G матрицалары

$$C = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & \tau \\ -k_2 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

мұндағы k_j ($j = 1, 2$) - қисықтық және τ - бұралым. Сонымен қатар, Френе-Серре теңдеуін ескереміз. Қисықтың қисықтығы мен бұралымы келесі түрде беріледі:

$$k_1 = \sqrt{\mathbf{e}_{1x}^2}, \quad \tau = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_{1x} \wedge \mathbf{e}_{1xx})}{\mathbf{e}_{1x}^2}$$

үйлесімділік шартынан

$$C_t - G_x + [C, G] = 0$$

немесе элементтер арқылы

$$\begin{aligned} k_{1t} - \omega_{3x} - k_2 \omega_1 + \tau \omega_2 &= 0, \\ k_{2t} - \omega_{2x} + k_1 \omega_1 - \tau \omega_3 &= 0, \\ \tau_t - \omega_{1x} - k_1 \omega_2 + k_2 \omega_3 &= 0. \end{aligned}$$

Енді (1.84) және (1.85) теңдеулеріндегі U_3 және V_3 матрицалық операторларын Паули матрицалары түрінде жазайық:

$$U_3 = -i\lambda^2\sigma_3 + \frac{\lambda}{2}(q_x + r_x)\sigma_1 + \frac{i\lambda}{2}(q_x - r_x)\sigma_2,$$

$$V_3 = i(1 - \lambda^2 - \frac{qr}{2} - \frac{1}{4\lambda^2})\sigma_3 + \frac{\lambda}{2}(q_x + r_x)\sigma_1 + \frac{i\lambda}{2}(q_x - r_x)\sigma_2 + \frac{iq}{4\lambda}(\sigma_1 + i\sigma_2) - \frac{ir}{4\lambda}(\sigma_1 - i\sigma_2).$$

Паули матрицасының $\sigma_j = 2i\mathbf{e}_j$ ($j=1,2,3$) қисықтарының бірлік векторларымен байланысын пайдаланып, U_3 және V_3 матрицаларын қайта жазамыз

$$U_3 = i\lambda(q_x + r_x)\mathbf{e}_1 - \lambda(q_x - r_x)\mathbf{e}_2 + 2\lambda^2\mathbf{e}_3,$$

$$V_3 = \left(i\lambda q_x + i\lambda r_x - \frac{q}{2\lambda} + \frac{r}{2\lambda} \right) \mathbf{e}_1 - \left(\lambda q_x + \lambda r_x + \frac{iq}{2\lambda} + \frac{ir}{2\lambda} \right) \mathbf{e}_2 - \left(2 - 2\lambda^2 - qr - \frac{1}{2\lambda^2} \right) \mathbf{e}_3.$$

Сонымен, C және G матрицалары келесідей түрде анықталады

$$C = -\tau L_1 + \kappa_2 L_2 - \kappa_1 L_3,$$

$$G = -\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 - \omega_3 L_3,$$

онда

$$\begin{aligned} k_1 &= -2\lambda^2, & \omega_1 &= -i(\lambda q_x + \lambda r_x + \frac{iq}{2\lambda} - \frac{ir}{2\lambda}), \\ k_2 &= -\lambda(q_x - r_x), & \omega_2 &= -(\lambda q_x - \lambda r_x + \frac{iq}{2\lambda} + \frac{ir}{2\lambda}), \\ \tau &= -i\lambda(q_x + r_x), & \omega_3 &= 2(1 - \lambda^2 - \frac{qr}{2} - \frac{1}{4\lambda^2}). \end{aligned} \quad (1.94)$$

Осылайша, C және G матрицасының элементтерін алдық және енді осы матрицаларды үйлесімділік шартына қойсақ, (1.82) және (1.83) теңдеулер жүйесін аламыз.

Векторларды келесі формада анықтаймыз [84]:

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{A}.$$

Френе-Серре теңдеуінен

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1x} &= k_1\mathbf{e}_2 + k_2\mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_{1r} &= \omega_3\mathbf{e}_2 - \omega_2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_{2x} &= \tau\mathbf{e}_3 - k_1\mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_{2r} &= \omega_1\mathbf{e}_3 - \omega_3\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{3x} &= -k_2\mathbf{e}_1 - \tau\mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_{3r} &= \omega_2\mathbf{e}_1 - \omega_1\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Егер (1.94) және (1.95) теңдеулері (1.93) теңдеулеріне енгізілсе, онда Фокас-Ленеллс теңдеуі және Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі арасында геометриялық эквиваленттілік орнатылады. Бұл жұмыстың нәтижелері [85] жарияланған.

Бірінші бөлім бойынша қорытындылайтын болсақ, Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделі (1.4) мен КБД емес жүйесі арасында байланыс орнатылды, яғни Конно-Ооно теңдеуі және Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуіне геометриялық және калибровті эквивалентті екендігі анықталды. Және де бейсызқты Шредингер теңдеуінің жалпылаған түрі болып табылатын интегралданатын Фокас-Ленеллс теңдеуін зерттеп, оған геометриялық және калибровті эквивалентті болатын спиндік жүйені анықтадық.

2 КЕЛІСІЛГЕН КӨЗДЕРІ БАР ГЕЙЗЕНБЕРГТІҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ФЕРРОМАГНЕТИК ТЕНДЕУІ ЖӘНЕ КОМПЛЕКСТІ БАЙЛАНЫСҚАН ДИСПЕРСИЯЛЫ ЕМЕС ТЕНДЕУ

Интегралдық жүйелерді немесе шешімі бар бейсызықты дифференциалдық теңдеулерді зерттеу шашыраудың кері есебінің әдісі ашылғаннан бері белсенді зерттеу саласы болды. Бұл теңдеулер әмбебап болып табылады, өйткені олар физика мен математиканың көптеген салаларында кездеседі. Интегралдық жүйелер деп симметриялардың шексіз иерархиясы мен сақталу заңдары бар жүйелерді айтамыз. Шешімі бар бейсызықты дифференциалдық теңдеулер теориясында интегралданатын жүйелерді құрудың жүйелі әдісі маңызды мәселелердің бірі. Интегралданатын жүйелер үшін бірнеше параллельді құрылыс схемалары бар [86-111]. Интегралданатын бейсызықты дифференциалдық теңдеулерден басқа, интегралданатын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің тағы бір маңызды класы бар: көбінесе «дисперсиялы емес теңдеулер» деп аталатын «гидродинамиканың интегралдық теңдеулері» [86, р. 1678; 87, р. 092701-5; 88, р. 12194; 89, р. 10341; 90, р. 10]. Кейбір жағдайларда бұл теңдеулер интегралданатын солитондық жүйелердің дисперсиялық емес (немесе квазиклассикалық) шектері немесе құрылысы бойынша, мысалы, гидродинамикалық типті жүйелер болып табылады. Олар физика және математиканың әртүрлі мәселелерінде жиі кездеседі, сондықтан соңғы жылдары олар қарқынды түрде зерттелуде. Бұл теңдеулердің кейбірі гамильтондық мағынада интегралданады. Интегралданатын дисперсиялы емес теңдеулер Лакс жұптарының векторлық өрістері үшін коммутация шартына баламалы, сондықтан оларда өлшемдердің ерікті саны болуы мүмкін. Мысалы, [84, р. 372; 85, р. 198; 86, р. 1679]-да контактылы вектор өрістерін қамтитын изоспектрлік емес Лакс жұптарын пайдаланып, (3+1) өлшемдерде дисперсиялы емес жүйелерді құрудың жаңа жүйелі әдісі енгізілді.

Конно-Ооно теңдеуі (2.1) синус-Гордон теңдеуіне калибровті эквивалентті, ал комплексті түрі, яғни жалпыланған Конно-Ооно теңдеуі сәйкесінше Полмейер-Лунд-Рэгг теңдеуіне калибровті эквивалентті екендігі анықталды [91, р. 377; 92, р. 340; 93, р. 3536]. Бір қызығы, жалпыланған Конно-Ооно теңдеуі және оның редукциялары үшін басқа да геометриялық не калибровті эквивалентті теңдеулер болады. Бұл эквивалентті теңдеулердің барлығы Гейзенбергтің ферромагнетик моделінің жалпылама түрі болып табылады [112-123].

$$iA_t = \frac{1}{2}[A, A_{xx}] \quad (2.7)$$

және бұл бөлімнің негізі тақырыбы болып табылады.

Келісілген көздері бар интегралданатын жүйелер ғалымдардың назарын біршама аударуда (мысалы, [86, р. 1678; 87, р.; 88, р. 12190; 89, р. 10332] қараңыз). Келісілген көздері бар интегралданатын жүйелерді шашыраудың кері

есебі әдісімен шешуге болады, ал келісілген көздері бар кейбір интегралданатын жүйелердің N-солитонды шешімдері [90, р. 12; 91, р. 378; 92, р. 340; 93, р. 3536; 94, р. 452; 95, р. 207; 96, р. 245; 97, р. 2066; 98, р. 1389] алынған.

2.1 Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі

Бұл бөлімшеде келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуінің матрицалық және векторлық формаларын, сондай-ақ Лакс көрінісін және оны редукциясын қарастырайық. Алдымен келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуінің матрицалық түрін қарастырайық

$$iA_t = i(fA)_x + \frac{1}{4\alpha}[A, A_t]_x + \frac{1}{\alpha}[A, W], \quad (2.8)$$

$$W_x = i(\alpha - \omega)[A, W] \quad (2.9)$$

немесе

$$iA_t = ifA_x + \frac{1}{4\alpha}[A, A_t]_x + \frac{1}{\alpha}[A, W], \quad (2.10)$$

$$f_x = \frac{1}{4i\alpha} \text{tr}(A[A_t, A_x]), \quad (2.11)$$

$$W_x = i(\alpha - \omega)[A, W], \quad (2.12)$$

мұнда

$$A = \begin{pmatrix} A_3 & \sigma A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = I, \quad A^\pm = A_1 \pm iA_2, \quad A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1, \quad (2.13)$$

$$W = \begin{pmatrix} W_3 & \sigma W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix}, \quad W^2 = I, \quad W^\pm = W_1 \pm iW_2, \quad W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = 1. \quad (2.14)$$

Ал келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуінің векторлық түрі келісідей түрде беріледі:

$$\mathbf{A}_t = (f\mathbf{A})_x + \frac{1}{2\alpha}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_t)_x - \frac{2}{\alpha}\mathbf{A} \wedge \mathbf{W}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{W}_x = 2(\omega - \alpha)\mathbf{A} \wedge \mathbf{W} \quad (2.16)$$

немесе

$$\mathbf{A}_t = f\mathbf{A}_x + \frac{1}{2\alpha}\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_{xt} - \frac{2}{\alpha}\mathbf{A} \wedge \mathbf{W}, \quad (2.17)$$

$$f_x = \frac{1}{2\alpha}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_t \wedge \mathbf{A}_x), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{W}_x = 2(\omega - \alpha)\mathbf{A} \wedge \mathbf{W}, \quad (2.19)$$

мұнда

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{A}^2 = 1, \quad f = \frac{1}{\alpha^2}a + \frac{1}{\alpha(\alpha - \omega)}\eta,$$

$$\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3), \quad W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = \text{const} = 1, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}_x = 0.$$

Гейзенбергінің жалпыланған ферромагнетик теңдеуін келісілген көздері бар теңдеу ретінде қайта жазуға болады. W матрицалық функциясының компоненттері үшін келесі түрде енгіземіз:

$$W_1 = \phi_1 \bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_1 \phi_2, \quad (2.20)$$

$$W_2 = i(\phi_1 \bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1 \phi_2), \quad (2.21)$$

$$W_3 = |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 \quad (2.22)$$

немесе

$$W^+ = 2\bar{\phi}_1 \phi_2,$$

$$W^- = 2\phi_1 \bar{\phi}_2,$$

$$W_3 = |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2,$$

осылайша W матрицасы түрінде беріледі

$$W = \begin{pmatrix} W_3 & W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 & 2\phi_1 \bar{\phi}_2 \\ 2\bar{\phi}_1 \phi_2 & |\phi_2|^2 - |\phi_1|^2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

мұнда ϕ_j келесі теңдеулер жүйесіне бағынады

$$\phi_{1x} = -i\zeta(A_3\phi_1 + A^- \phi_2), \quad (2.27)$$

$$\phi_{2x} = -i\zeta(A^+ \phi_1 - A_3\phi_2), \quad (2.28)$$

мұнда $\zeta = \omega - \alpha$. Осылайша, Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуін (келісілген көздері бар теңдеу ретінде) былай жазуға болады

$$iA_t = ifA_x + \frac{1}{4\alpha} [A_x, A_{tx}] + F, \quad (2.29)$$

$$f_x = \frac{1}{4i\alpha} \text{tr}(A[A_t, A_x]), \quad (2.30)$$

$$\phi_{1x} = -i\zeta (A_3\phi_1 + A^-\phi_2), \quad (2.31)$$

$$\phi_{2x} = -i\zeta (A^+\phi_1 - A_3\phi_2), \quad (2.32)$$

мұнда

$$F = \frac{2}{\alpha} \begin{pmatrix} A^-\bar{\phi}_1\phi_2 - A^+\phi_1\bar{\phi}_2 & 2A_3\phi_1\bar{\phi}_2 - A^-(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) \\ A^+(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) - 2A_3\bar{\phi}_1\phi_2 & A^+\phi_1\bar{\phi}_2 - A^-\bar{\phi}_1\phi_2 \end{pmatrix}.$$

Лакс ұсынысы

Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі (2.9)-(2.10) интегралданады. Оның Лакс ұсынысы

$$\Phi_x = U_5\Phi, \quad (2.33)$$

$$\Phi_t = V_5\Phi, \quad (2.34)$$

немесе

$$U_5 = -i(\lambda - \alpha)A, \\ V_5 = -\frac{i(\lambda - \alpha)}{\alpha\lambda} \left(\alpha^2 fA - \frac{i\alpha}{4} [A, A_t] - \frac{\alpha}{\alpha - \omega} W \right) - \frac{i(\lambda - \alpha)}{(\alpha - \omega)(\lambda - \omega)} W.$$

Редукциялары

Егер $W = 0$ болса, онда келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі келесі түрге жазылады:

$$iA_t = i(fA)_x + \frac{1}{4\alpha} [A, A_t]_x \quad (2.35)$$

немесе

$$iA_t = ifA_x + \frac{1}{4\alpha}[A, A_t]_x, \quad (2.36)$$

$$f_x = \frac{1}{4i\alpha}tr(A[A_t, A_x]), \quad (2.37)$$

және ол Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик [124-134] теңдеуі деп аталады.

Сақталу заңдары

Интегралданатын жүйе ретінде келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі үшін шексіз сақталу заңдары болады. Мысалы, теңдеулерден алуға болатын ең қарапайым (2.18)-(2.20) келесі нысанға ие

$$\left(\mathbf{A}_x^2\right)_t + \left(8\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} + 8\alpha^2 f\right)_x = 0. \quad (2.38)$$

$\mathbf{W} = 0$ жағдайында (2.44) теңдеуін келесі теңдеуді аламыз

$$\left(\mathbf{A}_x^2\right)_t + 8\alpha^2 f_x = 0 \quad (2.39)$$

сондықтан

$$\left(\mathbf{A}_x^2\right)_t = 4\alpha\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_x \wedge \mathbf{A}_t). \quad (2.40)$$

2.2 Кеңістік қисықтарының интегралданатын қозғалыстары. Геометриялық эквивалентті Лакшманан теңдеуі

Бұл бөлімшеде келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі мен кеңістік қисықтарының қозғалысы арасындағы байланысты орнатамыз. Оны пайдаланып, келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуінің Лакшманан (геометриялық) эквивалентті аналогын табуға болады. Тегіс кеңістік қисықтарының тобын R^3 қарастырайық

$$\gamma(x, t): [0, X] \times [0, T] \rightarrow R^3, \quad (2.41)$$

мұнда $x - t$ уақыттың әрбір моментіндегі қисық доғасының ұзындығы. Бұл жағдайда жанама бірлік векторы \mathbf{e}_1 , негізгі нормальды бірлік вектор \mathbf{e}_2 және бинормальды бірлік векторы \mathbf{e}_3 келесі түрде анықталады:

$$\mathbf{e}_1 = \gamma_x, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\gamma_{xx}}{|\gamma_{xx}|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \quad (2.42)$$

Сәйкесінше Френе-Серре теңдеуі келесідей

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_x = C \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & \tau \\ -\kappa_2 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

мұнда τ , κ_1 және κ_2 сәйкесінше бұралым, геодезиялық қисықтық және нормальды қисықтық қисығы деп аталады.

Геометриялық (Лакшманан) және калибровті эквиваленттілік стандартты интегралданатындар арасында болатыны белгілі. Френе-Серре теңдеуі және жалпы уақыт эволюциясының теңдеуі

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_x = C \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_t = G \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

мұнда

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & \tau \\ -\kappa_2 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Бұл теңдеулердің үйлесімділік шарты

$$C_t - G_x + [C, G] = 0 \quad (2.46)$$

немесе матрица компоненттері арқылы жазсақ

$$\kappa_{1t} - \omega_{3x} - \kappa_2 \omega_1 + \tau \omega_2 = 0, \quad (2.47)$$

$$\kappa_{2t} - \omega_{2x} + \kappa_1 \omega_1 - \tau \omega_3 = 0, \quad (2.48)$$

$$\tau_t - \omega_{1x} - \kappa_1 \omega_2 + \kappa_2 \omega_3 = 0. \quad (2.49)$$

Енді келесі қадам - сәйкестіндіру

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_1 \quad (2.50)$$

және

$$\kappa_1 = -2\zeta, \quad \kappa_2 = r - q, \quad \tau = -i(r + q), \quad (2.51)$$

мұнда $q = -0.5(\kappa_2 - i\tau)$ және

$r = 0.5(\kappa_2 + i\tau)$ - кейбір функциялар;

$\zeta = const$. Онда

$$\omega_1 = \frac{0.5r_t - 0.5q_t - n - p}{\zeta} + \frac{n + p}{\zeta - \omega}, \quad (2.52)$$

$$\omega_2 = \frac{i(0.5r_t + 0.5q_t - n + p)}{\zeta} + \frac{n - p}{\zeta - \omega}, \quad (2.53)$$

$$\omega_3 = \frac{2\eta}{\zeta - \omega} + \frac{2a}{\zeta}. \quad (2.54)$$

Сонда (2.34)-(2.35) теңдеулер $q, r, \rho = 4a, n, p, \eta$ үшін келесі теңдеулерді береді:

$$q_{xt} - \rho q + 4p_x = 0, \quad (2.55)$$

$$r_{xt} - \rho r - 4n_x = 0, \quad (2.56)$$

$$\rho_x - 0.5(rq)_t + 2(qn - rp) = 0, \quad (2.57)$$

$$\eta_x + 0.5(rp - qn) = 0, \quad (2.58)$$

$$p_x + 2i\omega p + \eta q = 0, \quad (2.59)$$

$$n_x - 2i\omega n - \eta r = 0. \quad (2.60)$$

бұл комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі. $r = \sigma\bar{q}$ және $n = -\sigma\bar{p}$ редукциялары үшін комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі (2.44)-(2.49) келесі түрге келеді:

$$q_{xt} - 4aq + 2p_x = 0, \quad (2.61)$$

$$a_x - \sigma[0.5(|q|^2)_t + q\bar{p} + \bar{q}p] = 0, \quad (2.62)$$

$$\eta_x + \sigma(\bar{q}p + q\bar{p}) = 0, \quad (2.63)$$

$$p_x + 2i\omega p + 2\eta q = 0, \quad (2.64)$$

Осылайша, келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі (2.8)-(2.9) және комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі (2.61)-(2.64) арасындағы Лакшманнан (геометриялық) эквиваленттілігі дәлелденді.

2.3 Калибровті эквивалентті баламасы

Алдыңғы бөлімше келісілген көздері бар жалпыланған Гейзенбергтің ферромагнетик теңдеуі (2.8)-(2.9) және комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі (2.55)-(2.60) арасындағы геометриялық эквиваленттілігін дәлелдеді, енді бұл бөлімшеде осы теңдеулердің калибровті эквиваленттілігін дәлелдегіміз келеді. Мұны тексеру үшін $\Phi = g\Psi$ түрлендіруін орындайық, мұндағы Φ (2.33)-(2.34) және $g = \Psi|_{\lambda=\alpha}$ көпмүшесінің кейбір шешімдері. Сонда Ψ функция келесі сызықты теңдеулердің жүйесіне бағынады

$$\Psi_x = U_6\Psi, \quad (2.65)$$

$$\Psi_t = V_6\Psi. \quad (2.66)$$

мұнда

$$U_6 = -i\lambda\sigma_3 + Q, \quad V_6 = \frac{i}{\lambda}F + \frac{i}{\lambda - \omega}G, \quad (2.67)$$

мұнда

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \sigma\bar{q} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & -0.5q_t - p \\ 0.5\sigma(\bar{q}_t + \bar{p}) & -a \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \eta & p \\ -\sigma\bar{p} & -\eta \end{pmatrix},$$

Үйлесімділік шартынан $U_{6t} - V_{6x} + [U_6, V_6] = 0$ келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделін (2.55)-(2.60) беретінін оңай тексеруге болады.

2.4 Комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі

Бізге ыңғайлы болу үшін мұнда комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрінің (2.55)-(2.60) негізгі формулалары жинақталған

$$q_{xt} - 4aq + 2p_x = 0, \quad (2.68)$$

$$r_{xt} - 4ar - 2n_x = 0, \quad (2.69)$$

$$a_x - 0.5(rq)_t + qn - rp = 0, \quad (2.70)$$

$$\eta_x + rp - qn = 0, \quad (2.71)$$

$$p_x + 2i\omega p + 2\eta q = 0, \quad (2.72)$$

$$n_x - 2i\omega n - 2\eta r = 0. \quad (2.73)$$

Лакс ұсынысы

Комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі интегралданатын теңдеу және оның Лакс ұсынысын келесідей түрде

$$\Psi_x = U_7 \Psi, \quad (2.74)$$

$$\Psi_t = V_7 \Psi, \quad (2.75)$$

мұнда

$$U_7 = -i\lambda\sigma_3 + Q, \quad V_7 = \frac{i}{\lambda}F + \frac{i}{\lambda - \omega}G, \quad (2.76)$$

мұндағы

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & -0.5q_t - p \\ 0.5r_t - n & -a \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \eta & p \\ n & -\eta \end{pmatrix}.$$

(2.74)-(2.76) теңдеулерінен келесі маңызды формуланы аламыз

$$\eta^2 + np = const \quad (2.77)$$

немесе

$$\eta^2 + np = 1. \quad (2.78)$$

Редукциялары

1-жағдай: $r = \sigma q$

Алдымен келесі дербес жағдайды қарастырайық

$$r = \sigma q. \quad (2.79)$$

Сонда

$$q_{xt} - 4aq + 2p_x = 0, \quad (2.80)$$

$$\eta_x + 2\sigma qp = 0, \quad (2.81)$$

$$p_x + 2i\omega p + 2\eta q = 0, \quad (2.82)$$

мұнда $n = -\sigma p$, $\omega = \bar{\omega}$. Бұл да интегралданатын теңдеу және оның Лакс ұсынысы төмендегідей түрде анықталады:

$$\Psi_x = U_8 \Psi, \quad (2.83)$$

$$\Psi_t = V_8 \Psi, \quad (2.84)$$

мұнда

$$U_8 = -\lambda \sigma_3 + Q, \quad V_8 = \frac{i}{\lambda} F + \frac{i}{\lambda - \omega} G, \quad (2.85)$$

мұнда

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \sigma q & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & -0.5q_t - p \\ 0.5\sigma q_t + \sigma p & -a \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \eta & p \\ \sigma p & -\eta \end{pmatrix}.$$

2-жағдай: $r = \sigma \bar{q}$

Бұл жағдайда

$$r = \sigma \bar{q}, \quad n = -\sigma \bar{p}, \quad (2.86)$$

Келесі теңдеулер жинағын аламыз

$$q_{xt} - 4aq + 2p_x = 0, \quad (2.87)$$

$$a_x - \sigma \left[0.5(|q|^2)_t + q\bar{p} + \bar{q}p \right] = 0, \quad (2.88)$$

$$\eta_x + \sigma(\bar{q}p + q\bar{p}) = 0, \quad (2.89)$$

$$p_x + 2i\omega p + 2\eta q = 0. \quad (2.90)$$

Комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрінің редукциялары келесі Лакс ұсынысымен интегралданады

$$\Psi_x = U_9 \Psi, \quad (2.91)$$

$$\Psi_t = V_9 \Psi, \quad (2.92)$$

мұнда

$$U_9 = -\lambda\sigma_3 + Q, \quad V_9 = \frac{i}{\lambda}F + \frac{i}{\lambda - \omega}G, \quad (2.93)$$

мұнда

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \sigma\bar{q} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & -0.5q_t - p \\ 0.5\sigma(\bar{q}_t + \bar{p}) & -a \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \eta & p \\ -\sigma\bar{p} & -\eta \end{pmatrix}.$$

3 жағдай: $p = n = \eta = 0$

Енді келесі дербес жағдайды қарастырайық

$$p = n = \eta = 0. \quad (2.94)$$

Онда

$$q_{xt} - 4aq = 0, \quad (2.95)$$

$$r_{xt} - 4ar = 0, \quad (2.96)$$

$$a_x - 0.5(rq)_t = 0, \quad (2.97)$$

бұл шын мәнде жалпыланған Конно-Ооно теңдеуі.

Комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрін келісілген көздері бар теңдеу ретінде қайта жазайық, онда p n және η функциялары үшін келесі көріністі қарастырамыз:

$$p = 2\psi_1\bar{\psi}_2, \quad n = -2\sigma\bar{\psi}_1\psi_2, \quad \eta = |\psi_1|^2 + \sigma|\psi_2|^2, \quad (2.98)$$

мұндағы $|\psi_1|^2 - \sigma|\psi_2|^2 = const$ және $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ (2.74)-(2.75) теңдеулерін қанағаттандырады. Сонда комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі

$$q_{xt} - 4aq + 4(\psi_1\bar{\psi}_2)_x = 0, \quad (2.99)$$

$$a_x - 0.5\sigma(|q|^2)_t - 2\sigma(q\bar{\psi}_1\psi_2 + \bar{q}\psi_1\bar{\psi}_2) = 0, \quad (2.100)$$

$$\psi_{1x} + i\xi\psi_1 - q\psi_2 = 0, \quad (2.101)$$

$$\psi_{2x} - i\xi\psi_2 - \sigma\bar{q}\psi_1 = 0 \quad (2.102)$$

немесе

$$q_{xt} - 4aq - 8i\xi\psi_1\bar{\psi}_2 + 4q(\sigma|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) = 0, \quad (2.103)$$

$$a_x - 0.5\sigma(|q|^2)_t - 2\sigma(q\bar{\psi}_1\psi_2 + \bar{q}\psi_1\bar{\psi}_2) = 0, \quad (2.104)$$

$$\psi_{1x} + i\xi\psi_1 - q\psi_2 = 0, \quad (2.105)$$

$$\psi_{2x} - i\xi\psi_2 - \sigma\bar{q}\psi_1 = 0. \quad (2.106)$$

Бұл комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпылануының қажетті түрі, келісілген көздері бар теңдеу ретінде жазылған.

2.5 Масштабты түрлендіру

Келесі масштабты түрлендіруді қарастырайық

$$a \rightarrow 0.25\rho, \quad (q, r) \rightarrow 0.5(q, r). \quad (2.107)$$

Бұл түрлендіру кезінде комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі (2.55)-(2.60) келесі түрге келеді:

$$q_{xt} - \rho q + 4p_x = 0, \quad (2.108)$$

$$r_{xt} - \rho r - 4n_x = 0, \quad (2.109)$$

$$\rho_x - 0.5(rq)_t + 2(qn - rp) = 0, \quad (2.110)$$

$$\eta_x + 0.5(rp - qn) = 0, \quad (2.111)$$

$$p_x + 2i\omega p + \eta q = 0, \quad (2.112)$$

$$n_x - 2i\omega n - \eta r = 0. \quad (2.113)$$

Егер жоғарыдағы теңдеулерге $p = n = \eta = 0$ деп есептесек, онда (2.108)-(2.113) теңдеулер жүйесін қайта кері жазайық

$$q_{xt} - \rho q = 0, \quad (2.114)$$

$$r_{xt} - \rho r = 0, \quad (2.115)$$

$$\rho_x - 0.5(rq)_t = 0. \quad (2.116)$$

Ол $(r) \rightarrow (-r)$ кезіндегі жалпыланған Конно-Ооно теңдеуінің стандартты түрі болып табылады.

2.6 Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуімен тудыратын интегралдық бет

Бұл бөлімшеде келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуімен тудыратын бетті қарастырамыз. Беттің $\mathbf{r}(x, t)$ радиус векторымен параметрленген үш өлшемді евклидтік R^3 кеңістігіндегі бетті қарастырайық. Бетті тұрғызу үшін келесі сәйкестендіруді орындайық

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{r}_x, \quad (2.117)$$

мұнда $\mathbf{r}_x^2 = 1$. Осыдан кейін келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуінің векторлық түрінен (2.15)-(2.16) төмендегі келесі теңдеуді аламыз

$$\mathbf{r}_t = f\mathbf{r}_x + \frac{1}{2\alpha}\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_{xt} - \frac{1}{\alpha(\omega - \alpha)}\mathbf{W}, \quad (2.118)$$

$$f_x = \frac{1}{2\alpha}\mathbf{r}_x \cdot (\mathbf{r}_{xt} \wedge \mathbf{r}_{xx}), \quad (2.119)$$

$$\mathbf{W}_x = 2(\omega - \alpha)\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{W}, \quad (2.120)$$

мұнда $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$. Бұл теңдеу (2.118)-(2.120) интегралданатын теңдеу және оның Лакс ұсынысы келесідей түрде беріледі

$$\Phi_x = U_{10}\Phi, \quad (2.121)$$

$$\Phi_t = V_{10}\Phi, \quad (2.122)$$

мұнда

$$U_{10} = -i(\lambda - \alpha)r_x, \quad (2.123)$$

$$V_{10} = -\frac{i(\lambda - \alpha)}{\alpha\lambda} \left(\alpha^2 f r_x - \frac{i\alpha}{4} [r_x, r_{xt}] - \frac{\alpha}{\alpha - \omega} W \right) - \frac{i(\lambda - \alpha)}{(\alpha - \omega)(\lambda - \omega)} W. \quad (2.124)$$

(2.121)-(2.122) теңдеулерінің үйлесімділік шарты келесі теңдеуді береді:

$$ir_t = ifr_x + \frac{1}{4\alpha} [r_x, r_t] + \frac{i}{\alpha(\alpha - \omega)} W, \quad (2.125)$$

$$f_x = \frac{1}{4i\alpha} \text{tr}(r_x [r_{xt}, r_{xx}]), \quad (2.126)$$

$$\mathbf{W}_x = i(\alpha - \omega)[\mathbf{r}_x, \mathbf{W}], \quad (2.127)$$

мұнда

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_3 & r^- \\ r^+ & -r_3 \end{pmatrix}, \quad r_x^2 = I, \quad r_{1x}^2 + r_{2x}^2 + r_{3x}^2 = 1, \quad r^\pm = r_1 \pm ir_2. \quad (2.128)$$

Біздің жағдайда беттің бірінші фундаменталды формасы келесі түрде жазайық

$$I = dx^2 + 2(\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_t) dx dt + \mathbf{r}_t^2 dt^2, \quad (2.129)$$

мұнда

$$\mathbf{r}_x^2 = 1, \quad (2.130)$$

$$\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_t = f + \frac{1}{\alpha(\omega - \alpha)} \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{W}, \quad (2.131)$$

$$\mathbf{r}_t^2 = f^2 + \frac{1}{\alpha^2(\omega - \alpha)^2} - \frac{2f(\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{W})}{\alpha(\omega - \alpha)} + \frac{|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_{xt}|^2}{4\alpha^2} - \frac{(\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_{xt}) \cdot \mathbf{W}}{\alpha^2(\omega - \alpha)}. \quad (2.132)$$

Соңында (2.128)-(2.130) теңдеуін келесі түрде қайта жазайық

$$\mathbf{r}_{xt} = 2\alpha \mathbf{r}_t \wedge \mathbf{r}_x + \frac{2}{\alpha - \omega} \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{W}, \quad (2.133)$$

$$\mathbf{W}_x = 2(\omega - \alpha) \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{W} \quad (2.134)$$

немесе

$$\mathbf{r}_{xt} = 2\alpha \mathbf{r}_t \wedge \mathbf{r}_x - \frac{1}{(\alpha - \omega)^2} \mathbf{W}_x, \quad (2.135)$$

$$\mathbf{W}_x = 2(\omega - \alpha) \mathbf{r}_x \wedge \mathbf{W}. \quad (2.136)$$

Жоғарыда алынған нәтижелер беттің $\mathbf{r}(x, t)$ радиус векторымен параметрленген үш өлшемді евклидтік R^3 кеңістігіндегі бетті анықтау үшін жеткілікті. Бұл бет интегралданады, өйткені оның теңдеуі (2.118)-(2.120), \mathbf{r} үшін теңдеуі Лакс ұсынысын қабылдайды. Осылайша, кейбір интегралданатын бетті

тудырады. Соңында (2.118)-(2.120) теңдеуінің қысқаша түрін ұсынамыз. Егер $\mathbf{W} = 0$ болса, келесі теңдеуді аламыз

$$\mathbf{r}_t = f\mathbf{r}_x + \frac{1}{2\alpha}\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_{xt} \quad (2.137)$$

немесе

$$\mathbf{r}_{xt} = 2\alpha\mathbf{r}_t \wedge \mathbf{r}_x. \quad (2.138)$$

мұнда

$$f = \mathbf{r}_t \cdot \mathbf{r}_x. \quad (2.139)$$

Соңында (2.128)-(2.130) теңдеуін келісілген көздері бар теңдеу ретінде ұсынамыз және оның түрі

$$r_{1t} = fr_{1x} + \frac{1}{2\alpha}(r_{2x}r_{3xt} - r_{2xt}r_{3x}) + \frac{1}{\alpha(\omega-\alpha)}(\phi_1\bar{\phi}_2 + \bar{\phi}_1\phi_2), \quad (2.140)$$

$$r_{2t} = fr_{2x} + \frac{1}{2\alpha}(r_{3x}r_{1xt} - r_{3xt}r_{1x}) + \frac{i}{\alpha(\omega-\alpha)}(\phi_1\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1\phi_2), \quad (2.141)$$

$$r_{3t} = fr_{3x} + \frac{1}{2\alpha}(r_{1x}r_{2xt} - r_{1xt}r_{2x}) + \frac{1}{\alpha(\omega-\alpha)}(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2), \quad (2.142)$$

$$f_x = \frac{1}{4i\alpha}tr(r_x[r_{xt}, r_{xx}]), \quad (2.143)$$

$$\phi_{1x} = -i\zeta(r_{3x}\phi_1 + r_x^-\phi_2), \quad (2.144)$$

$$\phi_{2x} = -i\zeta(r_x^+\phi_1 - r_{3x}\phi_2). \quad (2.145)$$

Бұл теңдеу өздігінен келісілген көздері бар теңдеу ретінде жазылған.

Сонымен қатар келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі мен комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі бір-біріне геометриялық және калибровті эквивалентті екенін көрсеттік. Бұл нәтижелер [124] жұмыста жарияланды.

2.7 Конно-Онно теңдеуінің солитондық шешімдері

Енді келісілген көздері $\mathbf{W} = 0$ болған кездегі Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуіне эквивалентті Конно-Онно (КО) теңдеуін қарастырайық [15, с. 42]

$$q_{xt} - \rho q = 0, \quad (2.146)$$

$$\rho_x + 0,5(q^2)_t = 0. \quad (2.147)$$

Конно мен Ооно ұсынған. Конно-Ооно теңдеуі байланысты дисперсиялы емес теңдеу ретінде де белгілі. Кейінірек Конно мен Какухата осы теңдеудің жалпыланған түрін ұсынды

$$q_{,xt} - \rho q = 0, \quad (2.148)$$

$$r_{,xt} - \rho r = 0, \quad (2.149)$$

$$\rho_{,x} - 0.5(rq)_{,t} = 0. \quad (2.150)$$

Бұл теңдеулер жүйесін жалпыланған Конно-Ооно теңдеуі (ЖКО) немесе жалпыланған байланысқан дисперсиялы емес теңдеу деп атаймыз. Жалпыланған Конно-Ооно теңдеуі шашыраудың кері есебі әдісімен интегралданады және оның Лакс ұсынысы келесідей түрде болады

$$\Phi_{,x} = U_{11}\Phi, \quad (2.151)$$

$$\Phi_{,t} = V_{11}\Phi, \quad (2.152)$$

мұнда

$$V_{11} = -i\lambda \begin{pmatrix} \rho & q_t \\ r_t & -\rho \end{pmatrix}, \quad U_{11} = \begin{pmatrix} \frac{i}{4\lambda} & -0,5q \\ 0,5r & -\frac{i}{4\lambda} \end{pmatrix},$$

(2.151)-(2.152) теңдеулерінің үйлесімділік шарты берілген

$$U_{11t} - V_{11x} + [U_{11}, V_{11}] = 0$$

және осы теңдеуге Лакс жұбын қою арқылы жалпыланған Конно-Ооно теңдеуін алуға болады.

Дарбу түрлендіру

Алдымен сызықты Ψ функцияның көмегімен түрлендіруді қарастырайық

$$\Phi^{[1]} = T\Phi,$$

Жаңа $\Psi^{[1]}$ функция төмендегі Лакс жұбын қанағаттандырады деп есептейік

$$\Phi_{,x}^{[1]} = U^{[1]}\Phi^{[1]},$$

$$\Phi_{,t}^{[1]} = V^{[1]}\Phi^{[1]},$$

мұнда

$$U^{[1]} = \begin{pmatrix} \frac{i}{4\lambda} & -0,5q^{[1]} \\ 0,5r^{[1]} & -\frac{i}{4\lambda} \end{pmatrix}, \quad V^{[1]} = -i\lambda \begin{pmatrix} \rho^{[1]} & q_t^{[1]} \\ r_t^{[1]} & -\rho^{[1]} \end{pmatrix},$$

Сонда T матрицасы келесі сәйкестіктерді қанағаттандыруы керек

$$T_x = U^{[1]}T - TU,$$

$$T_t = V^{[1]}T - TV,$$

Бұнда

$$T = \frac{1}{\lambda}I - M,$$

мұнда I - бірлік матрица және $M = H\Lambda H^{-1}$.

Енді нақты түрлендіруге кірісейік. Лакстың жұптарының $\lambda = \lambda_1$, шешімі $(h_1, h_2)^T$. болсын. Ал $(h_2, -h_1)^T$ $\lambda = -\lambda_1$ тендеуінің шешімі екенін оңай байқауға болады. Сонда

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & -h_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

Онда $\sigma = \frac{h_2}{h_1}$ және

$$S = \frac{1}{\lambda_1(1+\sigma^2)} \begin{pmatrix} 1-\sigma^2 & 2\sigma \\ 2\sigma & \sigma^2-1 \end{pmatrix}.$$

Қарапайым тілмен айтқанда, $\tan \frac{\theta}{2} = \sigma$ тендеуі келесі түрге келеді

$$S = \frac{1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Сонда Дарбу матрицасы төмендегі түрге ие болады

$$T = \frac{1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1} \cos \theta & -\frac{1}{\lambda_1} \sin \theta \\ -\frac{1}{\lambda_1} \sin \theta & \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Төмендегі σ_x көмегімен

$$\sigma_x = 0.5(r - q\sigma^2) - \frac{i}{2\lambda}\sigma.$$

θ функциясының туындысы анықтайық

$$\theta_x = \frac{r(1 + \cos \theta) - q(1 - \cos \theta)}{2} - \frac{i}{2\lambda} \sin \theta.$$

Сонда жоғарыдағы T түрлендіруді пайдаланып, σ және θ функцияларының t уақыт координатасы бойынша туындыларын анықтайық

$$\sigma_t = -i\lambda r_t + 2i\lambda\rho\sigma + i\lambda q_t \sigma^2,$$

$$\theta_t = i\lambda q_t(1 - \cos \theta) - i\lambda r_t(1 + \cos \theta) + 2i\lambda\rho \sin \theta.$$

Сонда q , r және ρ бойынша Дарбу түрлендіруі келесідей түрде анықталады

$$q^{[1]} = q - \frac{i}{\lambda_1} \frac{2\sigma}{(1 + \sigma^2)^2}, \quad (2.153)$$

$$r^{[1]} = r - \frac{i}{\lambda_1} \frac{2\sigma}{(1 + \sigma^2)^2}, \quad (2.154)$$

$$\rho^{[1]} = -\rho - \frac{2\lambda(1 - \sigma^2)(q_t \sigma^2 - r_t + 2i\lambda\rho\sigma)}{\lambda_1 (1 + \sigma^2)^2} \quad (2.155)$$

немесе

$$q^{[1]} = q - \frac{i}{2\lambda_1} \sin \theta (\cos \theta + 1), \quad (2.156)$$

$$r^{[1]} = r + \frac{i}{2\lambda_1} \sin \theta (\cos \theta - 1), \quad (2.157)$$

$$\rho^{[1]} = -\rho - \frac{i}{\lambda_1} (\cos \theta)_t. \quad (2.158)$$

Осы Лакс жұбы көмегімен жалпыланған Конно-Ооно теңдеуінің солитондық шешімін табуға болады.

Солитондық шешімдер

Байланысқан дисперсиялы емес (2.146)-(2.147) теңдеулерінің шешімі үшін ескі Лакс жұптарының (2.151)-(2.152) шешімін қанағаттандырады делік.

$$\Phi(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x, t, \lambda) & \psi_{12}(x, t, \lambda) \\ \psi_{21}(x, t, \lambda) & \psi_{22}(x, t, \lambda) \end{pmatrix},$$

λ_1, μ_1 – еркін тұрақтылар және

$$\sigma = \frac{\psi_{22}(x, t, \lambda_1) + \mu_1 \psi_{21}(x, t, \lambda_1)}{\psi_{12}(x, t, \lambda_1) + \mu_1 \psi_{11}(x, t, \lambda_1)},$$

Енді тривиальды шешімін $q = 0, r = 0, \rho = 1$ түрінде аламыз, Лакс жұбының (2.151)–(2.152) сәйкес бірлескен негізгі шешімін былай жазуға болады.

$$\Phi(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{4\lambda}x - i\lambda t\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i}{4\lambda}x + i\lambda t\right) \end{pmatrix},$$

Тұрақтылар үшін $\lambda_1 \neq 0$ және $\mu_1 = \exp(2\alpha_1) > 0$. Егер

$$\sigma = \exp\left(-\frac{i}{2\lambda}x + 2i\lambda t - 2\alpha_1\right)$$

және

$$T = \frac{1}{\lambda} I - \frac{1}{\lambda_1 \cosh \nu_1} \begin{pmatrix} \sinh \nu_1 & 1 \\ 1 & -\sinh \nu_1 \end{pmatrix},$$

мұнда

$$\nu_1 = \exp\left(\frac{i}{2\lambda}x - 2i\lambda t + 2\alpha_1\right).$$

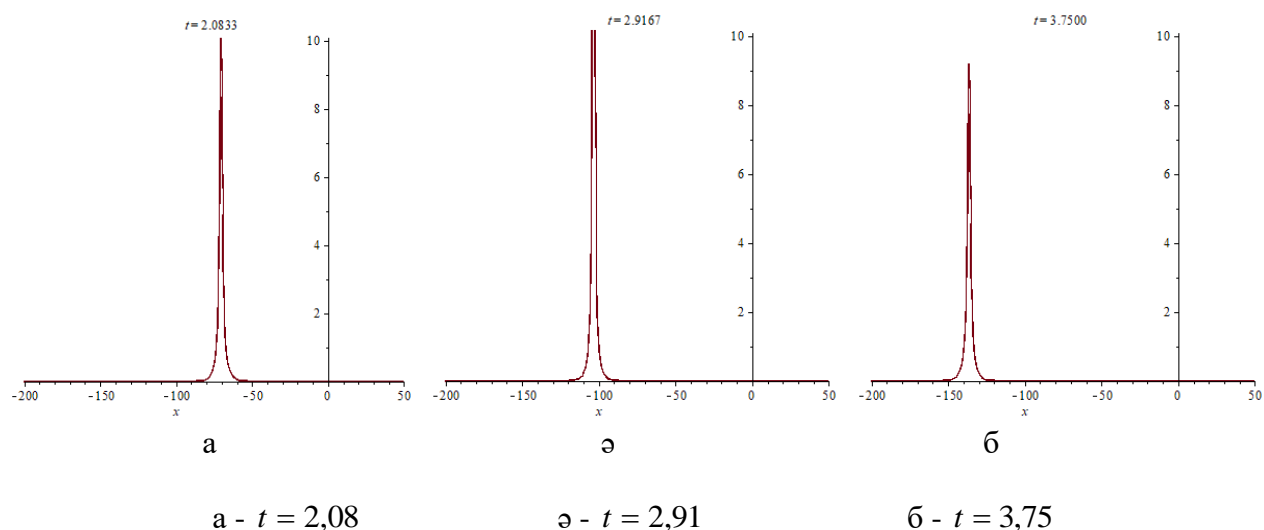
Онда жоғарыдағы теңдеулерді қолданып, жалпыланған Конно-Ооно теңдеуінің бір солитонды шешімін аламыз

$$q^{[1]} = -\frac{i}{2\lambda_1} \operatorname{sech}^2\left(-\frac{i}{2\lambda}x + 2i\lambda t - 2\alpha_1\right),$$

$$r^{[1]} = -\frac{i}{\lambda_1} \operatorname{sech}^2\left(-\frac{i}{2\lambda}x + 2i\lambda t - 2\alpha_1\right) \exp\left(-\frac{i}{2\lambda}x + 2i\lambda t - 2\alpha_1\right),$$

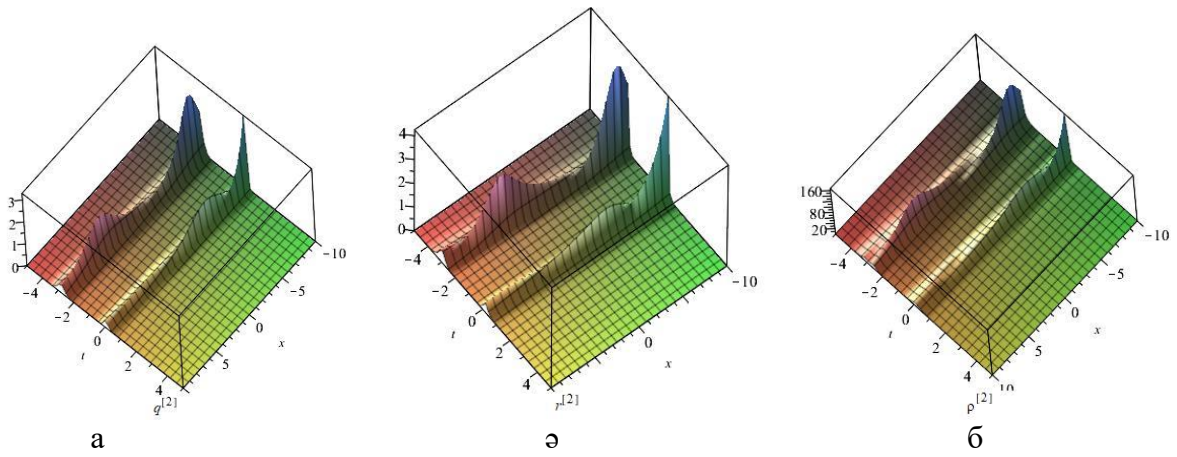
$$\rho^{[1]} = -1 - \frac{2i\lambda^2}{\lambda_1} \frac{\operatorname{sh}\left(\exp\left(-\frac{i}{2\lambda}x + 2i\lambda t - 2\alpha_1\right)\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\exp\left(-\frac{i}{2\lambda}x + 2i\lambda t - 2\alpha_1\right)\right)}.$$

Енді жалпыланған Конно-Оно теңдеуінің бір солитонды шешімдерінің графигін құрастырып (1-сурет), уақыт бойынша өзгеру динамикасын алайық



Сурет 1 – $\lambda_1 = -3i + 1$, $\alpha_1 = 1$ мәндері үшін $q^{[1]}$ функциясының уақыт бойынша өзгеру графигі

Сонымен, бұл бөлімшеде Лакс жұбының (2.151)-(2.152) көмегімен жалпыланған Конно-Оно теңдеуі үшін жаңа Дарбу түрлендіруі алынды. Құрылған Дарбу түрлендіруінің көмегімен құрастырылды солитон тәрізді шешімдері алынды. Барлық алынған шешімдер үшін ғана емес, сонымен қатар екі және үш солитонды шешімдердің уақыт бойынша өзгеру графиктері құрылды (2, 3-суреттер). Алынған нәтижелер 2019 жылы Прагада (Чехия) өткен «The 26th International conference on Integrable Systems and Quantum symmetries» атты конференцияда баяндалып, [125] жұмысында жарияланды.

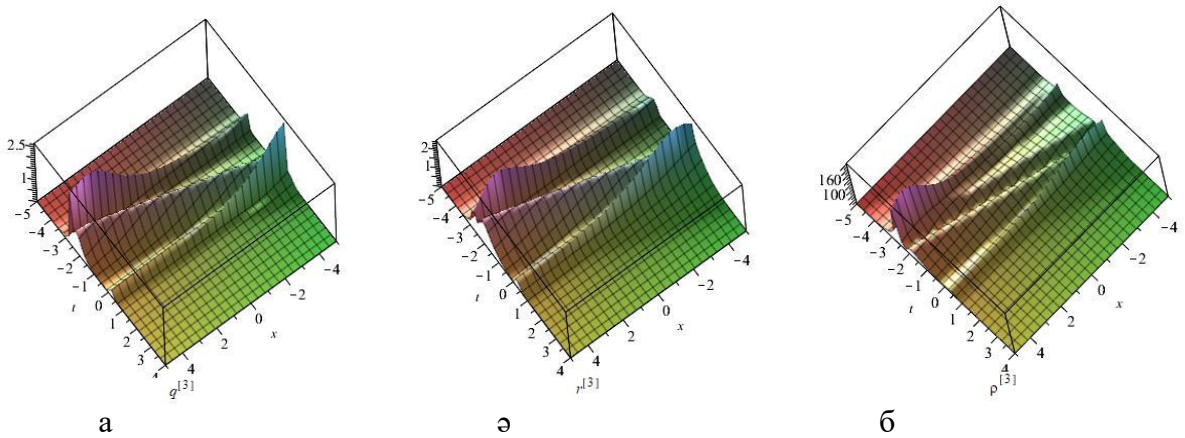


а – $q^{[2]}$ функциясы

ә – $r^{[2]}$ функциясы

б – $\rho^{[2]}$ функциясы

Сурет 2 – $\lambda_2 = -2i - 2$, $\alpha_2 = 5$ үшін $q^{[2]}$, $r^{[2]}$ және $\rho^{[2]}$ функцияларының екі солитонды шешімінің графигі



а – $q^{[3]}$ функциясы

ә – $r^{[3]}$ функциясы

б – $\rho^{[3]}$ функциясы

Сурет 3 – $\lambda_3 = -i$, $\alpha_3 = -1$ үшін $q^{[3]}$, $r^{[3]}$ және $\rho^{[3]}$ функцияларының үш солитонды шешімдерінің графигі

Сонымен келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі мен комплексті қысқа импульсті теңдеудің жалпыланған түрі бір-біріне геометриялық және калибровті эквивалентті екенін көрсеттік. Ал келісілген көздері $W = 0$ болған кездегі Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик теңдеуі мен Конно-Ооно теңдеуінің геометриялық және калибровті екендігі бірінші тарауда қарастырылған болатын. Бұл тарауда ұсынылған екі интегралдық теңдеулердің математикалық аспектілерімен шектелгенімен, оптикалық талшықтардағы ультра қысқа импульстердің динамикасын сипаттауға қабілетті модельдер ретінде бұл теңдеулер болашақта зерттеуді қажет ететін маңызды мәселе болып табылады.

3 КЕЙБІР ИНТЕГРАЛДАНАТЫН ТЕНДЕУЛЕРДІҢ СОЛИТОНДЫҚ ЖӘНЕ СОЛИТОН ТӘРІЗДІ ШЕШІМДЕРІ

Нақты жүйенің сызықты еместігі қазіргі ғылымда іргелі болып саналатыны белгілі. Бейсызықтылық - ғылымның барлық дерлік саласында көптеген қолданбалары бар қызықты тақырып. Әдетте бейсызықты құбылыстар бейсызықты қарапайым теңдеулер немесе дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер арқылы модельденеді. Бейсызықты дифференциалдық теңдеулердің көпшілігі толығымен интегралданатын теңдеулер. Бұл интегралданатын бейсызықты теңдеулердің солитон, дромион, қиратушы толқын және т.б. сияқты қызықты нақты шешімдердің бірнеше түрлері бар екенін білдіреді. Олар математикалық және физикалық тұрғыдан да үлкен қызығушылық тудырады, ал солитондар мен басқа да байланысты заттарды зерттеу соңғы бірнеше онжылдықта заманауи ғылым мен техникадағы ең қызықты және өте белсенді зерттеу бағыттарының біріне айналды. Атап айтқанда, толық интегралданатын бейсызықты дифференциалдық теңдеулер жиынтығы анықталып, зерттелінді [126-140].

Осындай интегралданатын бейсызықты жүйелердің ішінде маңызды рөлді Хирота-Максвелл-Блох (ХМБ) теңдеуі және оның Шредингер-Максвелл-Блох (ШМБ) теңдеуі, Кортевег-де Фриз-Максвелл-Блох (КдФ-МБ) теңдеуі, бейсызықты Шредингер теңдеуі (БШ), Хирота теңдеулер жүйесі сияқты редукциялары атқарады.

Бұл бөлімдегі мақсатымыз екі өлшемді ШМБ теңдеулері, бейсызықты Шредингер теңдеуі және Хирота жүйесі үшін Дарбу түрлендіруін құру, сонымен қатар олардың солитондық шешімдерін табу және сақталу заңдарын құру болып табылады.

Соңғы онжылдықта әр түрлі шешімдер теориясы әр түрлі бағытта дамыды. Бейсызықты интегралданатын теңдеулер үшін сызықты емес шешімдердің әр түрлі түрлері, мысалы, позитондар, солитондар және дромиондар ұсынылған. Сонымен қатар, солитондық теорияның дамуымен бейсызықты эволюциялық теңдеулерді шешудің әртүрлі әдіс-тәсілдері дамыды, мысалы, кері шашырау түрлендіруі [141], бисызықты Хирота әдісі [142], Дарбу түрлендіруі және Бэклунд түрлендіруі [143-145], Ли тобы және басқалары [146, 156]. Қызықты интегралданатын жүйенің бірі Хирота-Максвелл-Блох жүйесі [148-151]. Ол фемтосекундтық импульстің қоспалы талшық арқылы таралуының бейсызықты динамикасын сипаттайды.

Сонымен Хирота-Максвелл-Блох жүйесіне тоқталайық, ол жоғары ретті эффектiлермен ультра қысқа импульстардың бейсызықты эрбиум қоспалы талшықтарда таралуын басқарады. Мұндай жүйенің интегралды жағдайы Лакс жұбы арқылы анықталған. ХМБ жүйесінен комплексті Кортевег-де-Фриз-Максвелл-Блох теңдеулері, Хирота жүйесі, Шредингер-Максвелл-Блох теңдеулері, бейсызықты Шредингер теңдеулері, комплексті модификацияланған Кортевег-де-Фриз теңдеулері сияқты редукциялары бар [152] және келесі бөлімшелерде осы жоғарыда аталған теңдеулер үшін Лакс жұбын қарастырамыз. Интегралдық жүйелер үшін шешімдердің әртүрлі түрлерін генерациялаудың

тиімді әдістерінің бірі болып табылатын Дарбу түрлендіруін пайдалана отырып, солитон шешімдерін аламыз, сонымен қатар кейбір теңдеулер үшін сақталу заңдарын ұсынамыз [153, 154].

Бір өлшемді Хирота-Максвелл-Блох жүйесі келесі түрге ие [152, p. 1360]

$$iq_t + \varepsilon_1(q_{xx} + 2\delta|q|^2 q) + i\varepsilon_2(q_{xxx} + 6\delta|q|^2 q_x) - 2ip = 0, \quad (3.1)$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0, \quad (3.2)$$

$$\eta_x + \delta(q^* p + p^* q) = 0, \quad (3.3)$$

Ал екі өлшемді Хирота-Максвелл-Блох жүйесі үшін

$$iq_t + \varepsilon_1 q_{xy} + i\varepsilon_2 q_{xy} - vq + i(wq)_x - 2ip = 0, \quad (3.4)$$

$$v_x + 2\varepsilon_1 \delta(|q|^2)_y - 2i\varepsilon_2 \delta(q_{xy}^* q - q^* q_{xy}) = 0, \quad (3.5)$$

$$w_x - 2\varepsilon_2 \delta(|q|^2)_y = 0, \quad (3.6)$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0, \quad (3.7)$$

$$\eta_x + \delta(q^* p + p^* q) = 0, \quad (3.8)$$

мұнда q, p комплексті функциялар;

v, w, η нақты функциялар;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta, \omega$ нақты тұрақтылар және $\delta = \pm 1$. «*» таңбасы комплексті түйіндесті білдіреді. Бұл теңдеулер жүйесі (3.1)-(3.3) және (3.4)-(3.8) келесі интегралданатын редукцияларды қабылдайды [152, p. 1363]:

1: $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$, Шредингер-Максвелл-Блох теңдеуі.

2: $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1$, комплексті модификацияланған Кортевег-де-Фриз-Максвелл-Блох теңдеуі.

3: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, p = \eta = 0$, Хирота жүйесі.

4: $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = p = \eta = 0$, бейсызықты Шредингер теңдеуі.

Келесі бөлімдерде бір өлшемді, екі өлшемді Шредингер-Максвелл-Блох теңдеуі, бейсызықты Шредингер теңдеуі және Хирота жүйесін зерттейміз. Бұл теңдеулердің барлығы интегралданатын жүйе болып табылғандықтан, олардың Лакс ұсыныстары бар [155]. Бұл бөлімде $\delta = +1$ жағдайымен шектелеміз. Егер $y = x$ координатарын теңестірсек, (3.4)–(3.8) теңдеулер жүйесі (1+1) өлшемді ХМБ жүйесін аламыз [148, p. 2942].

Сақталу заңдары кванттық физика, электромагнетизм, плазма физикасы, физикалық химия, бейсызықты оптика сияқты қолданбалы ғылымдардың

әртүрлі салаларында пайда болады [155, p. 126; 157-159]. Бейсызықты теңдеу үшін сақталу заңдарының шексіз санының болуы оның толық интегралданудың анықтамасы ретінде мәлімделді [160, 161]. Бейсызықты дербес дифференциалдық теңдеулер үшін сақталу заңдарын есептеудің әртүрлі әдістері [162] бар. Басым көзқарас симметриялар мен сақталу заңдары арасындағы байланысқа байланысты, бұл Нетер теоремасында айтылған [163-165].

Бұл бөлімшеде бір өлшемді Хирота-Максвелл-Блох жүйесі және оның редукциялары үшін шексіз көп сақталу заңдарын және оны Лакс жұбының Риккати формасынан символдық есептеу арқылы құрастырамыз. Бұл бөлімшеде қолданылған әдіс математикалық физикадағы бірнеше бейсызықты эволюциялық теңдеулеріне қолданылған [166-168]. Хирота-Максвелл-Блох жүйесі және оның редукциялары бір және екі өлшемде зерттелді [152, p. 1358; 151, p. 012018-2; 169]. Авторлар әртүрлі шешімдерді тапты, бірақ ХМБ жүйесінің сақталу заңдарының шексіз жиынтығына қатысты зерттеулер егжей-тегжейлі ұсынылмайды. Осы себепті бір өлшемді Хирота-Максвелл-Блох және Шредингер-Максвелл-Блох жүйелері үшін сақталу заңдарын табамыз.

Лакс жұбын (3.9)-(3.10) қолдана отырып, (3.1)-(3.3) теңдеуі үшін шексіз көптеген сақталу заңдарын алуға болады. $\Gamma = \psi_2/\psi_1$ [67, p. 1591-13] функциясын енгізе отырып, Лакс жұбынан келесі Риккати теңдеуін аламыз:

$$\Gamma_x = -r + 2i\lambda\Gamma - q\Gamma^2. \quad (3.9)$$

Жіктеуік

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \lambda^j q^{-1}. \quad (3.10)$$

(3.9)-де және λ -нің дәрежелері бірдей мүшелерді нөлге теңестіргенде келесі қатынасты аламыз:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{i}{2} \delta |q|^2, \\ g_2 &= -\frac{i}{2} \left(g_{1,x} - \frac{q_x}{q} g_1 \right), \\ g_3 &= -\frac{i}{2} \left(g_{2,x} - \frac{q_x}{q} g_2 - g_1^2 \right), \\ &\dots \\ g_{j+1} &= -\frac{i}{2} \left(g_{j,x} - \frac{q_x}{q} g_j - \sum_{k=1}^{j-1} g_k g_{j-k} \right), (j = 3, 4, 5, \dots), \end{aligned} \quad (3.11)$$

мұнда g_1, g_2 және g_n функциялары x пен t -ға тәуелді функциялар.

Хирота-Максвелл-Блох теңдеуінің Лакс жұбын қолдана отырып,

$$\frac{\psi_{1,x}}{\psi_1} = -i\lambda + q\Gamma, \quad (3.12)$$

$$\frac{\psi_{1,t}}{\psi_1} = (2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2)a_{11} + b_{11} + ((2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2)a_{12} + b_{12})\Gamma. \quad (3.13)$$

(3.12)-(3.13) өрнектің мәндерін $(\ln\psi_1)_{xt} = (\ln\psi_1)_{tx}$ үйлесімділік шартынан келесі өрнек шығады

$$[-i\lambda + q\Gamma]_t = [(2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2)a_{11} + b_{11} + ((2\varepsilon_1\lambda + 4\varepsilon_2\lambda^2)a_{12} + b_{12})\Gamma]_x, \quad (3.14)$$

мұнда

$$a_{11} = -i\lambda,$$

$$a_{12} = q,$$

$$b_{11} = \lambda i \varepsilon_2 \delta |q|^2 + i \varepsilon_1 \delta |q|^2 + \varepsilon_2 \delta (q_x^* q - q^* q_x) + \frac{i}{\lambda + \omega} \eta,$$

$$b_{12} = \lambda 2i \varepsilon_2 q_x + i \varepsilon_1 q_x - \varepsilon_2 (q_{xx} + 2\delta |q|^2 q) - \frac{i}{\lambda + \omega} p.$$

(3.10)-ді (3.11)-ге (3.14) ауыстырып, (3.14)-тің екі бөлігін де $\lambda + \omega$ -ға көбейткеннен кейін бірдей дәрежелі λ коэффициенттерін жинап, (3.1)-(3.3) теңдеулері үшін шексіз көп сақталу заңдарын аламыз.

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = \frac{\partial J_k}{\partial x}, \quad (3.15)$$

мұнда

$$\rho_1 = -\frac{i}{2} \delta |q|^2,$$

$$\rho_2 = -\frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{2} q_x^* q + i\omega |q|^2 \right),$$

$$\rho_3 = g_3 + \omega g_2, \quad (3.16)$$

...

$$\rho_n = g_n + \omega g_{n-1}, \quad (n = 4, 5, 6, \dots)$$

және

$$J_1 = (b_{11}^0 \omega + i\eta) + (2\varepsilon_1 \omega + 2i\varepsilon_2 \omega \frac{q_x}{q} + b_{12}^0) g_1 + (2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \omega + 2i\varepsilon_2 \frac{q_x}{q}) g_2,$$

$$J_2 = (b_{12}^0 \omega \frac{1}{q} - \frac{ip}{q}) g_1 + (2\varepsilon_1 \omega + 2i\varepsilon_2 \omega \frac{q_x}{q} + b_{12}^0) g_2 + (2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \omega + 2i\varepsilon_2 \frac{q_x}{q}) g_3,$$

$$J_3 = (b_{12}^0 \omega \frac{1}{q} - \frac{ip}{q})g_2 + (2\varepsilon_1 \omega + 2i\varepsilon_2 \omega \frac{q_x}{q} + b_{12}^0)g_3 + (2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \omega + 2i\varepsilon_2 \frac{q_x}{q})g_4, \quad (3.17)$$

...

$$J_n = (b_{12}^0 \omega \frac{1}{q} - \frac{ip}{q})g_{n-1} + (2\varepsilon_1 \omega + 2i\varepsilon_2 \omega \frac{q_x}{q} + b_{12}^0)g_n + (2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \omega + 2i\varepsilon_2 \frac{q_x}{q})g_{n+1},$$

мұнда

$$\begin{aligned} b_{11}^0 &= i\varepsilon_1 \delta |q|^2 + \varepsilon_2 \delta (q_x^* q - q^* q_x), \\ b_{12}^0 &= i\varepsilon_1 q_x - \varepsilon_2 (q_{xx} + 2\delta |q|^2 q). \end{aligned}$$

Мұнда ρ_k және $J_k (k=1,2,3,...)$ сәйкесінше сақталған тығыздықтар мен сақталған ағындар келтірілген.

Соңында, ХМБ жүйесінің редукциялары үшін сақтау заңдарын қарастырайық:

1. Егер $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$, жағдайында ШМБ теңдеулері (3.16)-(3.17) үшін сақтау заңдарын аламыз:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{i}{2} \delta |q|^2, \\ \rho_2 &= -\frac{\delta}{2} (\frac{1}{2} q_x^* q + i\omega |q|^2), \\ \rho_3 &= -\frac{i\delta}{2} (-q_{xx}^* q + (|q|^2)^2 - \omega q_x^* q), \end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned} J_1 &= (i\delta |q|^2 \omega + i\eta) + (2\omega + iq_x)g_1 + 2g_2, \\ J_2 &= (iq_x \omega \frac{1}{q} - \frac{ip}{q})g_1 + (2\omega + iq_x)g_2 + 2g_3, \\ J_3 &= (iq_x \omega \frac{1}{q} - \frac{ip}{q})g_2 + (2\omega + iq_x)g_3 + 2g_4. \end{aligned}$$

Егер $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1$, жағдайында комплексті модификацияланған КдФ-МБ (3.16)-(3.17) теңдеулер жүйесі үшін сақталу заңын аламыз

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{i}{2} \delta |q|^2, \\ \rho_2 &= -\frac{\delta}{2} (\frac{1}{2} q_x^* q + i\omega |q|^2), \\ \rho_3 &= -\frac{i\delta}{2} (-q_{xx}^* q + (|q|^2)^2 - \omega q_x^* q), \end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned}
 J_1 &= (\delta(q_x^* q - q^* q_x) \omega + i\eta) + (2i\omega \frac{q_x}{q} - q_{xx} - 2\delta |q|^2 q) g_1 + (4\omega + 2i \frac{q_x}{q}) g_2, \\
 J_2 &= (-(q_{xx} + 2\delta |q|^2 q) \omega \frac{1}{q} - \frac{ip}{q}) g_1 + (2i\omega \frac{q_x}{q} - q_{xx} - 2\delta |q|^2 q) g_2 + (4\omega + 2i \frac{q_x}{q}) g_3, \\
 J_3 &= (-(q_{xx} + 2\delta |q|^2 q) \omega \frac{1}{q} - \frac{ip}{q}) g_2 + (2i\omega \frac{q_x}{q} - q_{xx} - 2\delta |q|^2 q) g_3 + (4\omega + 2i \frac{q_x}{q}) g_4.
 \end{aligned}$$

Бұл бөлімшеде Хирота-Максвелл-Блох жүйесі, Шредингер-Максвелл-Блох жүйесі және комплексті модификацияланған Кортвег де Фриз-Максвелл-Блох теңдеулері сияқты бейсызықты эволюциялық теңдеулер үшін шексіз көп сақталу заңдарын құрастырдық [170]. Сақталу заңдары Лакс жұбының Риккати түрінен алынған. Сақталу заңдарының шексіз жиынтығының болуы осы теңдеулердің толық интегралдық қасиетінің пайдалы көрсеткіші болып табылады.

3.1 Шредингер-Максвелл-Блох теңдеуі

Осындай интегралданатын бейсызықты жүйелердің ішінде Шредингер-Максвелл-Блох (ШМБ) теңдеуі маңызды рөл атқарады. ШМБ теңдеуі резонанстық және эрбий қосылған жүйелер [171] бар оптикалық талшықтардағы солитондардың таралуын сипаттайды. (1+1) өлшемді ШМБ теңдеуі [172] жылы Дарбу түрлендіруінің көмегімен зерттелді, мұнда авторлар әртүрлі «негізгі» (бастапқы шешім) солитонды және периодты шешімдерін алды.

Бір өлшемді Шредингер-Максвелл-Блох теңдеуін қарастырайық

$$\begin{aligned}
 i q_t + q_{xy} - vq - 2ip &= 0, \\
 i r_t - r_{xy} + vr - 2ik &= 0, \\
 v_x + 2\delta(qr)_y &= 0, \\
 p_x - 2i\omega p - 2\eta q &= 0, \\
 k_x + 2i\omega k - 2\eta r &= 0, \\
 \eta_x + rp + kq &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

мұнда q, k, r, p - комплексті функциялар;

η, v - нақты функциялар;

ω - нақты тұрақтылар, ал

x, y, t - төменгі индекстер айнымалылар бойынша дербес туындыны білдіреді. Бұл жүйе (3.18) шашыраудың кері есебі әдісімен интегралданады [58 p. 2125].

3.1.1 Лакс ұсынысы

Екі өлшемді ШМБ теңдеулер жүйесі (3.18) үшін сәйкес Лакс ұсынысы келесідей түрде

$$\Psi_x = A\Psi, \quad (3.19)$$

$$\Psi_t = 2\lambda\Psi_y + B\Psi, \quad (3.20)$$

мұнда A және B матрицаларының түрі мынадай:

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0,$$

$$B = B_0 + \frac{i}{\lambda + \omega} B_{-1}.$$

Бұнда $\sigma_3, A_0, B_0, B_{-1}$ 2×2 өлшемді матрицалар:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} -0,5iv & iq_y \\ ir_y & 0,5iv \end{pmatrix}, \quad B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta & -p \\ -k & -\eta \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

мұнда $r = \delta q^*, k = \delta p^*$, «*» символы комплексті түйіндес және δ нақты тұрақты дегенді білдіреді. Онда теңдеулер жүйесі келесі түрге келеді

$$iq_t + q_{xy} - vq - 2ip = 0,$$

$$v_x + 2\delta(|q|^2)_y = 0, \quad (3.21)$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0,$$

$$\eta_x + \delta(q^* p + p^* q) = 0.$$

Сонымен $\delta = \pm 1$ деп есептейік. Егер $\delta = +1$ болса, онда тартылыс немесе $\delta = -1$ болса, кері итеруші әсер деп қабылдаймыз.

Келесі бөлімде екі өлшемді ШМБ теңдеуі үшін бір ретгі Дарбу түрлендіруін құрамыз.

3.1.2 Дарбу түрлендіру

Екі өлшемді Шредингер-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесі үшін Лакс жұбын (3.43)-(3.44) қолданып, Дарбудың бірінші реттік түрленудірін қарастырайық. Ол үшін алдымен сызықтық функцияның түрленуі

$$\Psi^{[1]} = T\Psi = (\lambda I - M)\Psi, \quad (3.22)$$

онда $\Psi^{[1]}$ меншікті функциясы үшін келесі Лакс жұбын қанағаттандыруы тиіс:

$$\Psi_x^{[1]} = A^{[1]}\Psi^{[1]}, \quad (3.23)$$

$$\Psi_t^{[1]} = 2\lambda\Psi_y^{[1]} + B^{[1]}\Psi^{[1]}, \quad (3.24)$$

мұнда $A^{[1]}$ және $B^{[1]}$ матрицалары $q^{[1]}, v^{[1]}, p^{[1]}, \eta^{[1]}$ функцияларына және λ параметріне тәуелді болып келеді. M - белгісіз матрица, I - бірлік матрица. (3.23)-(3.24) теңдеулері орындалуы үшін T матрица келесі теңдеулерді қанағаттандыруы керек

$$T_x + TA = A^{[1]}T, \quad (3.25)$$

$$T_t + TB = 2\lambda T_y + B^{[1]}T. \quad (3.26)$$

Содан кейін q, v, p, η және $q^{[1]}, p^{[1]}, v^{[1]}, \eta^{[1]}$ арасындағы қатынасты осы теңдеулерден анықтауға болады, бұл екі өлшемді ШМБ теңдеуінің Дарбу түрлендіруі болып табылады. (3.25) теңдеудің екі жағының λ^i коэффициенттерін салыстыра отырып, аламыз.

$$\lambda^0 : M_x = A_0^{[1]}M - MA_0,$$

$$\lambda^1 : A_0^{[1]} = A_0 + i[M, \sigma_3], \quad (3.27)$$

$$\lambda^2 : i\sigma_3 = i\sigma_3 I.$$

Ақырында, (3.27) теңдеуден

$$q^{[1]} = q - 2im_{12}, \quad r^{[1]} = r - 2im_{21}. \quad (3.28)$$

Сондықтан $\delta = +1$ болғанда тартылыс әрекеттесу үшін $m_{21} = -m_{12}^*$ аламыз. Сонда (3.26) теңдеудің екі жағының λ^i коэффициенттерін дәрежесі бойынша жинақтайық

$$\lambda^0 : -M_t = iB_{-1}^{[1]} - B_0^{[1]}M - iB_{-1} + MB_0, \quad (3.29)$$

$$\lambda^1 : 2M_y = B_0^{[1]} - B_0, \quad (3.30)$$

$$(\lambda + \omega)^{-1} : 0 = -i\omega B_{-1}^{[1]} - iB_{-1}^{[1]}M + i\omega B_{-1} + iMB_{-1}. \quad (3.31)$$

Сонда (3.29)-(3.31) теңдеулер жүйесінен

$$B_{-1}^{[1]} = (M + \omega I)B_{-1}(M + \omega I)^{-1}. \quad (3.32)$$

Бұл теңдеулер (3.28), (3.32) екі өлшемді ШМБ теңдеуінің бір ретті Дарбу түрлендіруін береді. Енді M матрицасын осылай қабылдайық

$$M = H\Lambda H^{-1},$$

мұнда

$$H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1(\lambda_2; t, x, y) \\ \psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_2(\lambda_2; t, x, y) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

және $H \neq 0$, мұндағы λ_1 және λ_2 комплексті тұрақтылар. Содан кейін, осы әдіспен N -ретті Дарбу түрлендіруін құруға болады [145, p. 192]. Келесі бөлімшеде Дарбу түрлендіруінің көмегімен солитон шешімін аламыз.

3.1.3 Солитондық шешімдері

Бір-солитонды шешімдерді алу үшін $q = 0, v = 0, p = 0, \eta = 1$ жағдайлары орындалуы қажет. Содан кейін Лакс жүйесіне тиісті сызықтық жүйе келесі формада беріледі

$$\psi_{1x} = -i\lambda\psi_1,$$

$$\psi_{2x} = i\lambda\psi_2,$$

$$\psi_{1t} = 2\lambda\psi_{1y} + \frac{i}{\lambda + \omega}\psi_1,$$

$$\psi_{2t} = 2\lambda\psi_{2y} - \frac{i}{\lambda + \omega}\psi_2.$$

Бұл жүйе келесі нақты шешімдерді қабылдайды

$$\psi_1 = \psi_{10} e^{-i\lambda_1 x + i\mu_1 y + i\left(2\lambda\mu_1 + \frac{1}{\lambda_1 + \omega}\right)t},$$

$$\psi_2 = \psi_{20} e^{i\lambda_1 x - i\mu_1 y - i\left(2\lambda_1 \mu_1 + \frac{1}{\lambda_1 + \omega}\right)t}$$

немесе

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{-i\lambda_1 x + i\mu_1 y + i\left(2\lambda_1 \mu_1 + \frac{1}{\lambda_1 + \omega}\right)t + \delta_1 + i\delta_2}, \\ \psi_2 &= e^{i\lambda_1 x - i\mu_1 y - i\left(2\lambda_1 \mu_1 + \frac{1}{\lambda_1 + \omega}\right)t - \delta_1 - i\delta_2 + i\delta_0}, \end{aligned}$$

мұнда $\lambda_1 = \alpha + ib$, $\mu_1 = c + id$. δ_i , c және d нақты тұрақтылар. Онда Шредингер-Максвелл-Блох теңдеулерінің екі өлшемді жүйесінің бір-солитондық шешімдері келесідей болады

$$q^{[1]} = \frac{2be^{L-L^*-i\delta_0}}{\cosh(L+L^*)},$$

$$v^{[1]} = -4i(a + bi \tanh(L+L^*))_y,$$

$$p^{[1]} = \frac{2bi[(\omega + a) \cosh(L+L^*) + bi \sinh(L+L^*)]e^{L-L^*-i\delta_0}}{(\omega + a)^2 + b^2) \cosh^2(L+L^*)},$$

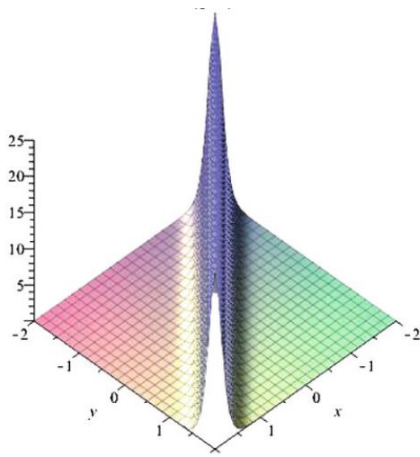
мұнда

$$L = -i\lambda_1 x + i\mu_1 + i\left(2\lambda_1 \mu_1 + \frac{1}{\lambda_1 + \omega}\right)t + \delta_1 + i\delta_2;$$

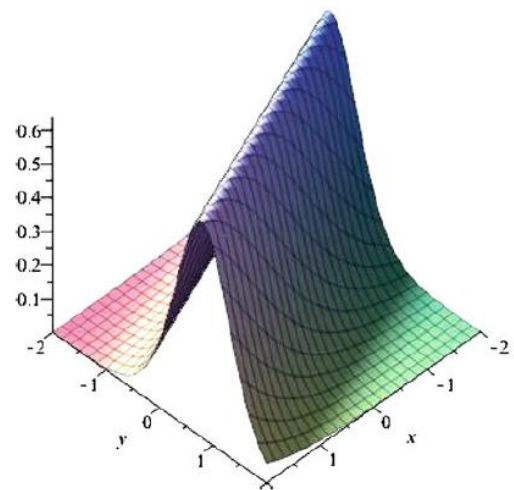
$$L^* = i\lambda_1^* x - i\mu_1^* y - i\left(2\lambda_1^* \mu_1^* + \frac{1}{\lambda_1^* + \omega}\right)t + \delta_1 - i\delta_2.$$

Жоғарыда келтірілген бір ретті Дарбу түрлендіруін қолдана отырып, екі өлшемді ШМБ теңдеуінің N-солитондық шешімін құруға болады. Төменде бір солитонды шешімдердің графиктері берілген (4, 5 және 6-суреттер).

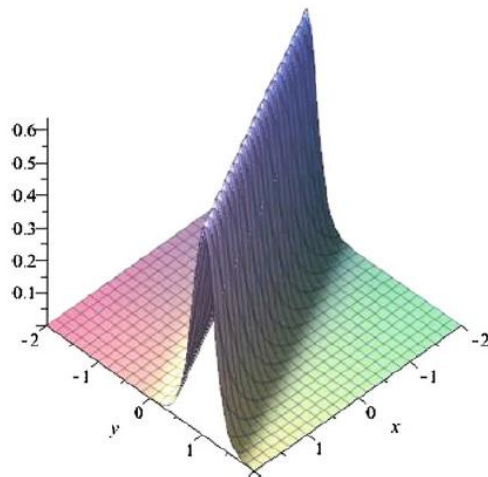
Бұл бөлімде екі өлшемді ШМБ теңдеуі үшін Дарбу түрлендіруін құрастырдық. Алынған Дарбу түрлендіруін пайдалана отырып, $q^{[1]}$, $v^{[1]}$, $p^{[1]}$ функцияларының бір солитонды шешімі алынды және $t=0$ мезетіндегі графиктері құрылды. Жоғарыда келтірілген нәтижелерді пайдалана отырып, екі өлшемді ШМБ теңдеуінің N-солитонды шешімдерін, бризер және қиратушы толқынды шешімдерін құруға болады. Бір қызығы, қиратушы толқын түріндегі бейсызықты теңдеулердің шешімдері қазіргі уақытта бейсызықты физика мен математикадағы ең өзекті тақырыптардың бірі.



Сурет 4 – $q^{[1]}$ функциясының $t = 0$ кезіндегі бір солитонды шешімі



Сурет 5 – $v^{[1]}$ функциясының $t = 0$ кезіндегі бір солитонды шешімі



Сурет 6 – $p^{[1]}$ функциясының $t = 0$ кезіндегі бір солитонды шешімі

Алынған шешімдерді физикада қолдану қызықты тақырып болып табылады. Атап айтқанда, ұсынылған шешімдерді эксперименттерде немесе талшықты-оптикалық байланыста қолдануға болады деп үміттенеміз.

3.2 Хирота жүйесі

Қазіргі заманғы ғылым мен техниканың барлық мәселелерін бейсызықты ғылым - маңызды пән ретінде түсіндіреді. Бейсызықты интегралданатан жүйелердің ішінен ғалымдар арасында қызу талқыға салынып жүрген эволюциялық теңдеулердің бірі – Хирота теңдеуі [59, р. 3765; 155, р. 126; 173]. Бұл теңдеу Шредингердің модификацияланған бейсызықты теңдеуі болып табылады [152, р. 1362; 174]. Хирота жүйесі көптеген бейсызықты құбылыстарды сипаттау үшін қолданылады. Оптикалық талшықтар жүйесінің зерттеу аймағында, физика, электрлік байланыс және басқа да инженерлік ғылымдар механизмінде кең қолданысқа ие.

Екі өлшемді Хирота теңдеуі келесідей түрде беріледі:

$$iq_t + \varepsilon_1 q_{xy} + i\varepsilon_2 q_{xxy} - vq + i(wq)_x = 0, \quad (3.33)$$

$$v_x + 2\varepsilon_1 \delta(|q|^2)_y - 2i\varepsilon_2 \delta(q_{xy}^* q - q^* q_{xy}) = 0, \quad (3.34)$$

$$w_x - 2\varepsilon_2 \delta(|q|^2)_y = 0, \quad (3.35)$$

мұнда $q(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ - белгісіз потенциалдар;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta$ - нақты тұрақтылар. «*» таңбасы комплексті түйіндес. Хирота теңдеуі оптикалық талшықтар, физика, телекоммуникациялар және басқа инженерлік ғылымдар салаларындағы бейсызықты құбылыстардың немесе механизмдердің көптеген түрлерін сипаттау үшін пайдаланылуы мүмкін. Егер $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ болса, (3.33)-(3.35) теңдеулер бейсызықты Шредингер теңдеуіне келтіріледі, ал $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1$ жағдайында бұл комплексті модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуін береді.

3.2.1 Лакс ұсыныс

Хирота теңдеуі үшін сәйкес Лакс ұсыныс келесі түрде көрсетуге болады:

$$\Psi_x = A\Psi, \quad (3.36)$$

$$\Psi_t = (2\varepsilon_1 \lambda + 4\varepsilon_2 \lambda^2)\Psi_y + B\Psi, \quad (3.37)$$

$\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ меншікті функциясымен және A және B матрицалары

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0, \quad B = \lambda B_1 + B_0,$$

мұндағы A_0, B_0 және σ_3 өлшемдері $[2 \times 2]$ матрицалар

$$B_0 = -\frac{i}{2}v\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & i\alpha q_y - \beta q_{xy} - wq \\ i\alpha r_y + \beta r_{xy} + wr & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = iw\sigma_3 + 2i\beta\sigma_3 A_{0y},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

және $r = \delta q^*$, $k = \delta p^*$, бұнда $\delta = \pm 1$. (2+1) өлшемді бейсызықты Хирота теңдеулер жүйесі (3.36)-(3.37) үшін сәйкесінше үйлесімділік шарты төмендегідей болады:

$$A_t - B_x + [A, B] + (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)A_y = 0.$$

Үйлесімділік шартына A, B матрицаларының мәндерін қойып, λ коэффициенттері бойынша матрица элементтерін жинасақ, қайтадан екі өлшемді бейсызықты Хирота жүйесін ала аламыз. Спектрлік параметр λ келесідей алынады:

$$\lambda_t = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\lambda_y.$$

Бұл жұмысымызда $\delta = +1$ жағдайымен шектелеміз.

3.2.2 Дарбу түрлендіруі

Абловиц-Кауп-Ньюэлл-Сегур жүйесі үшін Дарбу түрлендіру әдісі негізіндегі (3.36)-(3.37) теңдеулеріне келесі түрлендіруді қарастырайық:

$$\Psi^{[1]} = T\Psi,$$

мұнда T – $[2 \times 2]$ өлшемді Дарбу матрицасы деп аталады, I – $[2 \times 2]$ өлшемді бірлік матрица, M - элементтері белгісіз матрица

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2+1) өлшемді бейсызықты Хирота теңдеуінің Лакс жұбына сәйкестендіріп, жаңа меншікті функция $\Psi^{[1]}$ үшін де Лакс жұбын келесідей түрде алайық

$$\Psi_x^{[1]} = A^{[1]}\Psi^{[1]}, \quad (3.38)$$

$$\Psi_t^{[1]} = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\Psi_y^{[1]} + B^{[1]}\Psi^{[1]}, \quad (3.39)$$

мұнда $A^{[1]}, B^{[1]}$ матрицалары $q^{[1]}, v^{[1]}, w^{[1]}$ жаңа функцияларына және λ -спектрлік параметрге тәуелді. (3.38)-(3.39) теңдеуі орындалуы үшін T матрицасы келесі жүйені қанағаттандыруы керек

$$T_x + TA = A^{[1]}T, \quad (3.40)$$

$$T_t + TB = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)T_y + B^{[1]}T. \quad (3.41)$$

(3.41) теңдеудің әртүрлі дәрежелеріндегі λ^i коэффициенттерді біріктіріп, келесі теңдеулер жиынын аламыз.

$$\begin{aligned} \lambda^0 & : M_x = A_0^{[1]}M - MA_0, \\ \lambda^1 & : A_0^{[1]} = A_0 + i[M, \sigma_3], \\ \lambda^2 & : iI\sigma_3 = i\sigma_3I. \end{aligned} \quad (3.42)$$

(3.42) теңдеуінен

$$q^{[1]} = q - 2im_{12}, \quad q^{*[1]} = q^* - 2im_{21}. \quad (3.43)$$

Демек, $m_{21} = -m_{12}^*$. Енді (3.41) теңдеуі келесі қатынастарды береді

$$\begin{aligned} I & : \lambda_t = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\lambda_y, \\ \lambda^0 & : -M_t = MB_0 - B_0^{[1]}M, \\ \lambda^1 & : 2\alpha M_y = B_0^{[1]} - B_0 + MB_1 - B_1^{[1]}M, \\ \lambda^2 & : 4\beta M_y = B_1^{[1]} - B_1. \end{aligned}$$

Алынған теңдеулерді біріктіру арқылы келесі өрнектерді шығады:

$$B_0^{[1]} = B_0 - MB_1 + (B_1 + 4\beta M_y)M + 2\alpha M_y,$$

$$B_1^{[1]} = B_1 + 4\beta M_y.$$

Сәйкесінше, бұл теңдеулерден $v^{[1]}$ және $w^{[1]}$ функциялары үшін келесі Дарбу түрлендіруін аламыз:

$$v^{[1]} = v + 4i\alpha m_{11y} + 4\beta(m_{12}q_y^* + m_{12}^*q_y + 2im_{11}m_{11y} - 2im_{12}^*m_{12y}), \quad (3.44)$$

$$w^{[1]} = w - 4i\beta m_{11y} = w + 4i\beta m_{22y} \quad (3.45)$$

және $m_{22} = m_{11}^*$ байланысы шығады. Сонда M матрицасы мынадай түрге келеді:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -m_{12}^* & m_{11}^* \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2} \begin{pmatrix} m_{11}^* & -m_{12} \\ m_{12}^* & m_{11} \end{pmatrix}, \quad \det(M) \neq 0.$$

Енді белгісіз матрица

$$M = H\Lambda H^{-1},$$

шарттын қанағаттандырсын деп есептейік, мұндағы

$$H = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda_1; t, x, y) & \psi_1(\lambda_2; t, x, y) \\ \psi_2(\lambda_1; t, x, y) & \psi_2(\lambda_2; t, x, y) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

мұнда λ_1, λ_2 - комплексті тұрақтылар. Ал H матрицасының анықтаушы $\det H \neq 0$. Шектік шартты қанағаттандыруы үшін, жүйедегі $\psi^+ = \psi^{-1}, A_0^+ = -A_0, \lambda_2 = \lambda_1^*$ тең болуы тиіс. H матрицасы төмендегі жүйеге бағынады:

$$H_x = -i\sigma_3 H\Lambda + A_0 H, \quad (3.46)$$

$$H_t = 2H_y \Lambda + B_0 H. \quad (3.47)$$

Сонда M матрицасы мынадай түрге келеді:

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1 |\psi_1|^2 + \lambda_2 |\psi_2|^2 & (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_1 \psi_2^* \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_1^* \psi_2 & \lambda_1 |\psi_2|^2 + \lambda_2 |\psi_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Сонымен, нәтижесінде, екі өлшемді бейсызықты Хирота жүйесі (3.33)-(3.35) үшін Дарбу түрлендіруі алынды:

$$q^{[1]} = q - 2im_{12}, \quad (3.48)$$

$$v^{[1]} = v + 4i\alpha m_{11y} + 4\beta(m_{12} q_y^* + m_{12}^* q_y + 2im_{11} m_{11y} - 2im_{12}^* m_{12y}), \quad (3.49)$$

$$w^{[1]} = w - 4i\beta m_{11y} = w + 4i\beta m_{22y}. \quad (3.50)$$

Соңында детерминант түріндегі m_{ij} ($i, j=1,2$) өрнектерін келесі түрде қайта жазуға болатынын ескереміз

$$m_{11} = \frac{\lambda_1 |\psi_1|^2 + \lambda_2 |\psi_2|^2}{\Delta} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad m_{12} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \psi_1 \psi_2^*}{\Delta} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta},$$

мұнда

$$\Delta_{11} = \det \begin{pmatrix} \psi_1 & -\lambda_2 \psi_2^* \\ \psi_2 & \lambda_1 \psi_1^* \end{pmatrix}, \quad \Delta_{12} = -\det \begin{pmatrix} \psi_1 & \lambda_1 \psi_1 \\ \psi_2^* & \lambda_2 \psi_2^* \end{pmatrix}.$$

Енді осы алгоритмді ары қарай пайдаланып, 2-ші, 3-ші, N-ші ретті Дарбу түрлендіруін құруға болады және де осы құрылған дарбу түрлендіруді пайдаланып, солитондық, қиратушы толқынды шешімдерді алуға болады. Келесі бөлімшеде Дарбу түрлендіру әдісін пайдаланып, бір солитондық шешім табамыз.

3.2.3 Солитондық шешімі

Дарбу түрлендіруінің айқын формасына біле отырып, енді екі өлшемді Хирота жүйесі үшін солитондық шешімдері алайық. Ол «негізгі» шешімдерді келесі түрде қабылдаймыз:

$$q = v = w = 0.$$

Сонда сәйкес Лакс жұбына сәйкес келетін сызықтық жүйе:

$$\psi_{1x} = -i\lambda \psi_1,$$

$$\psi_{2x} = i\lambda \psi_2,$$

$$\psi_{1t} = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\psi_{1y},$$

$$\psi_{2t} = (2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\psi_{2y}.$$

Бұл теңдеулер жүйесі келесі нақты шешімдерді қабылдайды:

$$\psi_1 = e^{-i\lambda_1 x + i\mu_1 y + i[(2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\mu_1]t + \delta_1 + i\delta_2}, \quad (3.51)$$

$$\psi_2 = e^{i\lambda_1 x - i\mu_1 y - i[(2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2)\mu_1]t - \delta_1 - i\delta_2 - i\delta_0} \quad (3.52)$$

немесе

$$\psi_1 = e^{\theta_1 + i\chi_1}, \quad \psi_2 = e^{\theta_2 + i\chi_2}, \quad (3.53)$$

мұнда $\mu_1 = c + id$, $\lambda_1 = a + ib$ деп ескере отырып, (3.51)-(3.52) шешімнің θ_1, χ_1 дәрежесін келесі түрде жазайық:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= bx - dy - [d(2\alpha b + 8\beta ab) - c(2\alpha a + 4\beta(a^2 - b^2))]t + \delta_1, \\ \chi_1 &= -ax + cy + [d(2\alpha a + 4\beta(a^2 - b^2)) + c(2\alpha b + 8\beta ab)]t + \delta_2 \end{aligned}$$

және $\theta_2 = -\theta_1$, $\chi_2 = -\chi_1 + \delta_0$. Содан кейін, екі өлшемді Хирота теңдеуінің (3.33)-(3.35) бір-солитонды шешімдерін алу үшін Дарбу түрлендіруге (3.48)-(3.50) өрнекті қою арқылы алынады:

$$q^{[1]} = 2be^{2i\chi_1 - i\delta_0} \operatorname{sech}[2\theta_1],$$

$$v^{[1]} = 4i\alpha(a + ib \tanh[2\theta_1])_y + \\ + 16\beta ib^2 (e^{-2i\chi_1 + i\delta_0} \operatorname{sech}[2\theta_1])(e^{2i\chi_1 - i\delta_0} \operatorname{sech}[2\theta_1])_y + 4\beta i((a + ib \tanh[2\theta_1])^2)_y,$$

$$w^{[1]} = -4i\beta(a + ib \tanh[2\theta_1])_y.$$

Бұл жұмыста екі өлшемді Хирота теңдеуі (3.33)–(3.35) үшін Дарбу түрлендіру құрастырылды, ол эрбий қосылған бейсызықты оптикалық толқын өткізгіш арқылы ультра қысқа импульстердің таралуы арқылы анықталады [175]. Дарбу түрлендіруі интегралданатын теңдеулердің барлық шешімдерін алу үшін өте пайдалы. Бір ретті Дарбу түрлендіруі нақты берілген. Мысалы, екі өлшемді Хирота теңдеуінің бір солитондық шешімі бір ДТ арқылы табылды. Жоғарыда келтірілген ДТ арқылы мультисолитонды шешімдерді, қиратушы толқындарды, бризер шешімдерін және т.б. нақты шешімдерін құру үшін де пайдаланылуы мүмкін.

3.2.4 Кеңейтілген \tanh әдіс алгоритмі

Алдыңғы бөлімшелерде [173, р. 328] жылы Дарбу түрлендіру әдісін қолданып, Хирота жүйелерін зерттедік, онда бір солитонды шешімдерді алдық. Енді бұл бөлімде кеңейтілген \tanh әдісі негізінде екі өлшемді Хирота жүйесі үшін нақты шешімдерді аламыз.

Wazwaz [176-177] әзірлеген кеңейтілген \tanh әдісі қолдану бейсызықты толқынды теңдеулерді зерттеуге кеңірек мүмкіндік береді [179-180].

[181] жұмыста Wazwaz кеңейтілген \tanh әдісін қолдана бастады. Бейсызықты дербес туындылы теңдеуді

$$E_1(u, u_t, u_x, u_y, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.54)$$

қарапайым дифференциалдық теңдеуге түрлендіруге болады

$$E_2(u, -cu', u', u'', \dots) = 0, \quad (3.55)$$

кума толқынның түрлендіруін қолдану $\xi = x + y + ct$. (3.57) теңдеу, егер барлық мүшелерде туынды болса, интегралданады. Жаңа тәуелсіз айнымалыны енгізейік

$$Y = \tanh(\mu\xi), \quad \xi = x + y + ct, \quad (3.56)$$

мұнда μ – толқын саны, туындылардың өзгеруіне әкеледі:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} &= \mu(1-Y^2)\frac{d}{dY}, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= -2\mu^2Y(1-Y^2)\frac{d}{dY} + \mu^2Y(1-Y^2)\frac{d^2}{dY^2}, \\ \frac{d^3}{d\xi^3} &= 2\mu^3(1-Y^2)(3Y^2-1)\frac{d}{dY} - 6\mu^3Y(1-Y^2)^2\frac{d^2}{dY^2} + \mu^3(1-Y^2)^3\frac{d^3}{dY^3}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Кеңейтілген \tanh әдісі соңғы кеңейтілімді пайдалануға мүмкіндік береді

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k + \sum_{k=1}^M b_k Y^{-k}, \quad (3.58)$$

мұнда M – анықталынатын бүтін оң сан. M параметрі әдетте (3.55) бейсызықты мүшелері бар жоғары ретті туындыларды теңестіру арқылы алынады. M анықтап, (3.58) теңдеуін (3.55) теңдеуіне қойып, теңдеудегі Y дәрежелеріндегі барлық коэффициенттерді жинаймыз. Содан кейін осы коэффициенттердің барлығын нөлге теңестіреміз. Ең соңында a_k, b_k, μ, c параметрлері бар алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Осы белгісіз параметрлердің барлығын есептеп, $u(x, y, t)$ аналитикалық шешімін аламыз.

3.2.5 Кеңейтілген \tanh әдісін қолдану

Бұл бөлімде кеңейтілген \tanh әдісін қолдана отырып, екі өлшемді Хирота жүйесінің қума толқынды нақты шешімдерін құрастырамыз. Бұл әдісті қолдану үшін (3.57)-(3.59) жүйесін бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіру керек. Енді түрлендіруді қарастырайық

$$q(x, y, t) = \exp i(ax + by + dt)Q(x, y, t), \quad (3.59)$$

мұнда a, b, d - тұрақтылар;

$Q(x, y, t)$ - нақты функция, онда (3.57)-(3.59) жүйесі келесі дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіріледі.

$$\begin{aligned}Q(-d - \alpha b a - \beta b a^2) + Q_{xy}(\alpha - 2\beta a) - \beta b Q_{xx} - VQ - a(WQ) &= 0, \\ Q_t + (\alpha a - \beta a^2)Q_y + (ab - 2ab\beta)Q_x + \beta Q_{xxy} + (WQ)_x &= 0, \\ v_x + 2\alpha\delta(Q^2)_y - 4\beta\delta(aQ_y + bQ_x)Q &= 0, \\ w_x - 2\beta\delta(Q^2)_y &= 0.\end{aligned}\quad (3.60)$$

Толқынды түрлендіруді ауыстыру

$$\begin{aligned} Q(x, y, t) &= Q(\xi) = Q(x + y + ct), \\ v(x, y, t) &= V(\xi) = V(x + y + ct), \\ w(x, y, t) &= W(\xi) = W(x + y + ct), \end{aligned} \quad (3.61)$$

(3.60) теңдеулер жүйесінен

$$\begin{aligned} Q(-d - \alpha ba - \beta ba^2) + Q_{\xi\xi}(\alpha - \beta(b + 2a)) - VQ - a(WQ) &= 0, \\ Q_{\xi}(c + \alpha(b + a) + \beta(-2ab - a^2)) + Q_{\xi\xi\xi}\beta + (WQ)_{\xi} &= 0, \\ V_{\xi} + (2\alpha\delta - 2\beta\delta(b + a))(Q^2)_{\xi} &= 0, \\ W_{\xi} - 2\beta\delta(Q^2)_{\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

ξ -ға қатысты (3.62) интегралдану теңдеуі және қарапайымдылық үшін интегралдану тұрақтысын нөлге тең деп алсақ, мынаны табамыз.

$$\begin{aligned} Q(-d - \alpha ba - \beta ba^2) + Q_{\xi\xi}(\alpha - \beta(b + 2a)) - VQ - a(WQ) &= 0, \\ Q(c + \alpha(b + a) + \beta(-2ab - a^2)) + Q_{\xi\xi}\beta + (WQ) &= 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} V + (2\alpha\delta - 2\beta\delta(b + a))Q^2 &= 0, \\ W - 2\beta\delta Q^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

(3.64) теңдеулерді (3.63) теңдеулерге қойып, келесі қарапайым дифференциалдық теңдеуді аламыз.

$$\begin{aligned} Q(-d - \alpha ba - \beta ba^2) + Q_{\xi\xi}(\alpha - \beta(b + 2a)) + (2\alpha\delta - 2\beta\delta(b + a))Q^3 - 2a\beta\delta Q^3 &= 0, \\ Q(c + \alpha(b + a) + \beta(-2ab - a^2)) + Q_{\xi\xi}\beta + 2\beta\delta Q^3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

мұнда штрих ξ -ге қатысты дифференциалды білдіреді. Біртекті тепе-теңдік үшін (3.65) теңдеулерден $M = 1$ аламыз. Сонда (3.65) теңдеудің шешімін (3.58) келесі түрде табуға болады

$$Q(\xi) = a_0 + a_1 Y + b_1 Y^{-1}. \quad (3.66)$$

(3.66)-ды (3.65) орнына қойып, Y нүктесіндегі коэффициенттерді жинап, a_0, a_1, b_1, μ, c үшін алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Бірінші теңдеуден (3.65) алуға болады

$$\begin{aligned}
Y^3 &: -4aa_1^3\beta\delta - 2a_1^3b\beta\delta - 4aa_1\beta\mu^2 + 2a_1^3\alpha\delta - 2a_1b\beta\mu^2 + 2a_1\alpha\mu^2 = 0, \\
Y^2 &: -12aa_0a_1^2\beta\delta - 6a_0a_1^2b\beta\delta + 6a_0a_1^2\alpha\delta = 0, \\
Y &: -12aa_0^2a_1\beta\delta - 12aa_1^2b_1\beta\delta - 6a_0^2a_1b\beta\delta - 6a_1^2bb_1\beta\delta - a^2a_1b\beta + \\
Y &: + 4aa_1\beta\mu^2 + 6a_0^2a_1\alpha\delta + 6a_1^2\alpha b_1\delta + 2a_1b\beta\mu^2 - aa_1\alpha b - 2a_1\alpha b\mu^2 - a_1d = 0, \\
Y^0 &: -4a_0^3a\beta\delta - 24a_0a_1b_1a\beta\delta - 2a_0^3\beta\delta b - 12a_0a_1b_1\beta\delta b - a_0a^2b\beta + \\
&+ 2a_0^3\alpha\delta + 12a_0a_1b_1\alpha\delta - a_0a\alpha b - a_0d = 0, \\
Y^{-1} &: -12aa_0^2b_1\beta\delta - 12aa_1b_1^2\beta\delta - 6a_0^2bb_1\beta\delta - 6a_1bb_1^2\beta\delta - a^2bb_1\beta + \\
Y^{-1} &: + 4ab_1\beta\mu^2 + 6a_0^2\alpha b_1\delta + 6a_1\alpha b_1^2\delta + 2bb_1\beta\mu - a\alpha b b_1 - 2\alpha b_1\mu^2 - b_1d = 0, \\
Y^{-2} &: -12aa_0b_1^2\beta\delta - 6a_0bb_1^2\beta\delta + 6a_0\alpha b_1^2\delta = 0, \\
Y^{-3} &: -4ab_1^3\beta\delta - 2bb_1^3\beta\delta - 4ab_1\beta\mu^2 + 2\alpha b_1^3\delta - 2bb_1\beta\mu^2 + 2\alpha b_1\mu^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Екінші теңдеуден (3.65) шығады

$$\begin{aligned}
Y^3 &: 2a_1^3\beta\delta + 2a_1\beta\mu^2 = 0, \\
Y^2 &: 6\beta\delta a_0a_1^2 = 0, \\
Y &: 6a_0^2a_1\beta\delta + 6a_1^2b_1\beta\delta - a^2a_1\beta - 2aa_1b\beta - 2a_1\beta\mu^2 + aa_1\alpha + a_1\alpha b + a_1c = 0, \\
Y^0 &: 2\beta\delta a_0^3 + 12\beta\delta a_0a_1b_1 - a_0a^2\beta - 2a_0ab\beta + a_0\alpha a + a_0\alpha b + a_0c = 0, \\
Y^{-1} &: 6a_0^2b_1\beta\delta + 6a_1b_1^2\beta\delta - a^2b_1\beta - 2abb_1\beta - 2b_1\beta\mu^2 + a\alpha b_1 + \alpha b b_1 + b_1c = 0, \\
Y^{-2} &: 6\beta\delta a_0b_1^2 = 0, \\
Y^{-3} &: 2b_1^3\beta\delta + 2b_1\beta\mu^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

(3.67)-(3.68) жүйесін Maple көмегімен шешіп, келесі нәтижелерді аламыз:
1 жағдай:

$$\begin{aligned}
a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \pm \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{2\delta(\beta(2a + b) - \alpha)}}, \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{2(\beta(2a + b) - \alpha)}}, \\
c = \frac{(2a^3\beta^2 + 6a^2b\beta^2 + 2ab^2\beta^2 - 3a^2\alpha\beta - 4a\alpha b\beta - \alpha b^2\beta + a\alpha^2 + \alpha^2b + \beta d)}{\beta(2a + b) - \alpha}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

(3.69) мәнін (3.66) (3.59) және (3.61) орнына қойып, келесі шешімдерді аламыз:

$$\begin{aligned}
q_1(x, y, t) &= \pm \exp i(ax + by + dt) \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{2\delta(\beta(2a + b) - \alpha)}} \coth\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{2(\beta(2a + b) - \alpha)}} \xi\right), \\
v_1(x, y, t) &= \mp 2\delta(\alpha - \beta(a + b)) \left(\sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{2\delta(\beta(2a + b) - \alpha)}} \coth\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{2(\beta(2a + b) - \alpha)}} \xi\right)\right)^2, \\
w_1(x, y, t) &= \pm 2\beta\delta \left(\sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{2\delta(\beta(2a + b) - \alpha)}} \coth\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{2(\beta(2a + b) - \alpha)}} \xi\right)\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

2 жағдай:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad a_1 = \pm \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{2\delta(\beta(2a+b) - \alpha)}}, \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{2(\beta(2a+b) - \alpha)}}, \quad (3.71)$$

$$c = \frac{(2a^3\beta^2 + 6a^2b\beta^2 + 2ab^2\beta^2 - 3a^2\alpha\beta - 4a\alpha b\beta - ab^2\beta + a\alpha^2 + \alpha^2b + \beta d)}{\beta(2a+b) - \alpha}.$$

(3.71) мәнін (3.66) (3.59) және (3.61) орнына қойып, келесі шешімдерді аламыз:

$$q_2(x, y, t) = \pm \exp i(ax + by + dt) \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{2\delta(\beta(2a+b) - \alpha)}} \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{2(\beta(2a+b) - \alpha)}} \xi\right),$$

$$v_2(x, y, t) = \mp 2\delta(\alpha - \beta(a+b)) \left(\sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{2\delta(\beta(2a+b) - \alpha)}} \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{2(\beta(2a+b) - \alpha)}} \xi\right)\right)^2, \quad (3.72)$$

$$w_2(x, y, t) = \pm 2\beta\delta \left(\sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{2\delta(\beta(2a+b) - \alpha)}} \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{2(\beta(2a+b) - \alpha)}} \xi\right)\right)^2.$$

3-жағдай:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\delta(\beta(2a+b) - \alpha)}}, \quad \mu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{\beta(2a+b) - \alpha}},$$

$$b_1 = \mp \frac{1}{4} \frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\sqrt{(ab(a\beta + \alpha) + d)/4\delta((2a+b)\beta - \alpha)\delta((2a+b)\beta - \alpha)}}, \quad (3.73)$$

$$c = \frac{(2a^3\beta^2 + 6a^2b\beta^2 + 2ab^2\beta^2 - 3a^2\alpha\beta - 4a\alpha b\beta - ab^2\beta + a\alpha^2 + \alpha^2b + \beta d)}{\beta(2a+b) - \alpha}.$$

(3.73) мәнін (3.66) (3.59) және (3.61) орнына қойып, келесі шешімдерді аламыз:

$$q_3(x, y, t) = \exp i(ax + by + dt) \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\delta\beta((2a+b) - \alpha)}} \tanh\left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{\beta(2a+b) - \alpha}} \xi\right) \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{4} \frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\sqrt{(ab(a\beta + \alpha) + d)/4\delta((2a+b)\beta - \alpha)\delta((2a+b)\beta - \alpha)}} \coth\left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{\beta(2a+b) - \alpha}} \xi\right)\right),$$

$$v_3(x, y, t) = -2\delta(\alpha - \beta(a+b)) \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\delta\beta((2a+b) - \alpha)}} \tanh\left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{\beta(2a+b) - \alpha}} \xi\right) \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{4} \frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\sqrt{(ab(a\beta + \alpha) + d)/4\delta((2a+b)\beta - \alpha)\delta((2a+b)\beta - \alpha)}} \coth\left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{\beta(2a+b) - \alpha}} \xi\right)\right)^2, \quad (3.74)$$

$$w_3(x, y, t) = 2\beta\delta \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\delta\beta((2a+b) - \alpha)}} \tanh\left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{\beta(2a+b) - \alpha}} \xi\right) \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{4} \frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\sqrt{(ab(a\beta + \alpha) + d)/4\delta((2a+b)\beta - \alpha)\delta((2a+b)\beta - \alpha)}} \coth\left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(ab(a\beta + \alpha) + d)}{\beta(2a+b) - \alpha}} \xi\right)\right)^2.$$

4-жағдай:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0, \quad a_1 = \pm \sqrt{-\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8\delta((2a+b)\beta - \alpha)}}, \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8((2a+b)\beta - \alpha)}}, \\
 b_1 &= \mp \frac{1}{8} \frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\sqrt{-ab(a\beta + \alpha) + d}/8\delta((2a+b)\beta - \alpha)\delta((2a+b)\beta - \alpha)} \\
 c &= \frac{(2a^3\beta^2 + 6a^2b\beta^2 + 2ab^2\beta^2 - 3a^2\alpha\beta - 4a\alpha b\beta - ab^2\beta + a\alpha^2 + \alpha^2b + \beta d)}{\beta(2a+b) - \alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

(3.75) мәнін (3.66) (3.59) және (3.61) орнына қойып, келесі шешімдерді аламыз:

$$\begin{aligned}
 q_4(x, y, t) &= \exp i(ax + by + dt) \left(\pm \sqrt{-\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8\delta((2a+b)\beta - \alpha)}} \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8((2a+b)\beta - \alpha)}} \xi\right) \mp \right. \\
 &\quad \left. \mp \frac{1}{8} \frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\sqrt{-ab(a\beta + \alpha) + d}/8\delta((2a+b)\beta - \alpha)\delta((2a+b)\beta - \alpha)} \coth\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8((2a+b)\beta - \alpha)}} \xi\right) \right), \\
 v_4(x, y, t) &= -2\delta(\alpha - \beta(a+b)) \left(\pm \sqrt{-\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8\delta((2a+b)\beta - \alpha)}} \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8((2a+b)\beta - \alpha)}} \xi\right) \mp \right. \\
 &\quad \left. \mp \frac{1}{8} \frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\sqrt{-ab(a\beta + \alpha) + d}/8\delta((2a+b)\beta - \alpha)\delta((2a+b)\beta - \alpha)} \coth\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8((2a+b)\beta - \alpha)}} \xi\right) \right)^2, \\
 w_4(x, y, t) &= 2\beta\delta \left(\pm \sqrt{-\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8\delta((2a+b)\beta - \alpha)}} \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8((2a+b)\beta - \alpha)}} \xi\right) \mp \right. \\
 &\quad \left. \mp \frac{1}{8} \frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{\sqrt{-ab(a\beta + \alpha) + d}/8\delta((2a+b)\beta - \alpha)\delta((2a+b)\beta - \alpha)} \coth\left(\pm \sqrt{\frac{ab(a\beta + \alpha) + d}{8((2a+b)\beta - \alpha)}} \xi\right) \right)^2.
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Бұл бөлімде кеңейтілген \tanh әдісі арқылы Хирота теңдеулерінің екі өлшемді жүйесі зерттелді [182], нақты шешімдерді, соның ішінде екі өлшемді Хирота жүйесі үшін қума толқынды және периодтық шешімі анықталды. Осы мәліметтерді ескере отырып, Хирота жүйесінің аналитикалық шешімдерін алу үшін кеңейтілген тангенс (\tanh) әдісі тиімді екенін көруге болады. Бұл әдісті басқа бейсызықты күрделі теңдеулерге де қолдануға болады деп ойлаймыз.

3.3 Бейсызықты Шредингер теңдеуі

Шредингердің бейсызықты теңдеуі дисперсиялы ортадағы толқындар пакетінің қабықшасының таралуын сипаттайтын негізгі теңдеу болып табылады және терең су бетіндегі бейсызықты гравитациялық толқындарды, плазмадағы Ленгмюр толқындарын, бейсызықты диэлектриктегі электромагниттік толқындарды, және басқа да көптеген мәселелерде [168, р. 566] кездеседі. Бұл теңдеуді 1926 жылы көрнекті австриялық физик Э. Шредингер кванттық жүйелердің іргелі қасиеттерін талдау үшін ұсынған және бастапқыда атомшілік бөлшектердің өзара әрекеттесуін сипаттау үшін қолданылған [182].

Шредингердің жалпыланған немесе бейсызықты теңдеуі физикасындағы толқындық процестер құбылыстарының жиынтығын сипаттайды. Мысалы, ол жоғары қуатты лазерлік сәулесінің бейсызықты диэлектрлік ортаға әсер еткенде өзін-өзі фокустау әсерін сипаттау үшін және плазмада бейсызықты толқындардың таралуын сипаттау үшін қолданылады [183].

Бейсызықты Шредингер теңдеуі

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0,$$

мұнда q - толқынның амплитудасын көрсетеді.

Бейсызықты Шредингер теңдеуінің нақты шешімдерінің кейбір түрлері қиратушы толқындардың пайда болуының ықтимал механизмін сипаттау үшін қарастырылады, мысалы, Перегрин солитоны [184], периодтық бризер солитондары [185] және кеңістіктік периодтық немесе Ахмедиевтік бризер құралы [186]. Кейіннен бейсызықты Шредингер теңдеуінің үшін әртүрлі тәсілдермен қиратушы толқындарға шешімдерді құру әрекеттері жасалды.

Бұл бөлімшеде интегралданатын бейсызықты Шредингер теңдеуін [156, р. 060022-3] түрінде қарастырамыз.

$$\begin{aligned} q_t + q_{xy} - vq &= 0, \\ v_x + 2\delta(|q|^2)_y &= 0, \end{aligned} \quad (3.77)$$

мұнда $q(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ белгісіз потенциалдар, δ нақты тұрақты. Шредингердің бейсызықты теңдеуі оптикалық талшықтар, физика, телекоммуникациялар және басқа да техникалық ғылымдар саласындағы сызықтық емес құбылыстардың немесе механизмдердің көптеген түрлерін сипаттау үшін пайдаланылуы мүмкін.

(3.77) теңдеулер жүйесі шашыраудың кері есебі әдісімен интегралданған. Бейсызықты Шредингер теңдеуіне сәйкес келетін Лакс жұбы [187] түрі:

$$\Psi_x = A\Psi, \quad \Psi_t = 2\lambda\Psi_y + B\Psi, \quad (3.78)$$

мұнда A және B өлшемдері $[2 \times 2]$ матрицалар

$$\begin{aligned} A &= i\lambda\sigma_3 + A_0 = -i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= -\frac{i}{2}v\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & iq_y \\ ir_y & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & iq_y \\ ir_y & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

және $r = \delta q^*$, $k = \delta p^*$.

Жүйенің қисықтықтың нөлдік шарты немесе үйлесімділік шарты төмендегідей

$$A_t - B_x + [A, B] - 2\lambda A_y = 0.$$

Жоғарыдағы теңдеуді тікелей есептеу арқылы екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуін аламыз.

3.3.1 Дарбу түрлендіруі

Енді екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуі үшін бірінші ретті Дарбу түрлендіруін жасайық, ол үшін жаңа $\Psi^{[1]}$ меншікті функциясын енгізейік. Алдыңғы құрылған Дарбу түрлендіруді қарастырғандай $\Psi^{[1]} = T\Psi$ байланыста болсын жіне ондағы T матрицасы келесі теңдеулер жүйесіне бағынсын:

$$T_x + TA = A^{[1]}T, \quad (3.79)$$

$$T_t + TB = 2\lambda T_y + B^{[1]}T, \quad (3.80)$$

(3.79) теңдеуінен аламыз

$$\lambda^0 : M_x = A_0^{[1]}M - MA_0,$$

$$\lambda^1 : A_0^{[1]} = A_0 + i[M, \sigma_3],$$

$$\lambda^2 : iI\sigma_3 = i\sigma_3 I.$$

Осы жерден

$$q^{[1]} = q - 2im_{12}, \quad q^{*[1]} = q^* - 2im_{21}, \quad (3.81)$$

сонда $m_{21} = -m_{12}^*$ екенін байқаймыз. (3.80) теңдеу келесі қатынастарды береді:

$$\lambda^0 : -M_t = -B^{[1]}M + MB, \quad (3.82)$$

$$\lambda^1 : 2M_y = B^{[1]} - B, \quad (3.83)$$

(3.83)-ден $B^{[1]}$ үшін Дарбу түрлендіруі келесідей болатынын көруге болады

$$B^{[1]} = B + 2M_y.$$

Сонымен бірге (3.83) теңдеуінен

$$v^{[1]} = v + 4im_{11y}, \quad (3.84)$$

Бұл жерден $m_{22} = m_{11}^*$ екенін ескереміз. Содан M матрицасы келесі түрге келеді

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -m_{12}^* & m_{11}^* \end{pmatrix},$$

оның кері матрицасы:

$$M^{-1} = \frac{1}{|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2} \begin{pmatrix} m_{11}^* & -m_{12} \\ m_{12}^* & m_{11} \end{pmatrix}.$$

Енді матрицаның компоненттерін меншікті функциялар арқылы өрнектейміз

$$M = \frac{1}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1 |\psi_1|^2 + \lambda_2 |\psi_2|^2 & (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_1 \psi_2^* \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \psi_1^* \psi_2 & \lambda_1 |\psi_2|^2 + \lambda_2 |\psi_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Соңында (3.81) және (3.84) түріндегі (3.77) теңдеуінің шешімі табылды, енді құрастырылған бірінші ретті Дарбу түрлендіруін қолданып, N - еселенген Дарбу түрлендіруін дәл осылай құрастыруға болады [154, p. 020147-2].

3.3.2 Солитондық шешімі

(2+1) өлшемді БШ теңдеуі үшін бір солитонды шешім алайық, ол үшін «seed» ретінде $q = v = 0$ жағдайын қарастырайық. Онда Лакс жұбынан сәйкес сызықты теңдеулер жүйесін алуымызға болады:

$$\begin{aligned} \Psi_{1x} &= -i\lambda\Psi_1, \\ \Psi_{2x} &= i\lambda\Psi_2, \\ \Psi_{1t} &= -2\lambda\Psi_{1y}, \\ \Psi_{2t} &= 2\lambda\Psi_{2y}, \end{aligned}$$

Бұл теңдеулер жүйесінің шешімдерін келесі түрде іздейік:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= e^{-i\lambda x + i\mu_1 y + 2i\mu_1 t + \delta_1 + i\delta_2}, \\ \Psi_2 &= e^{i\lambda x - i\mu_1 y - 2i\mu_1 t - \delta_1 + i\delta_2}, \end{aligned}$$

немесе

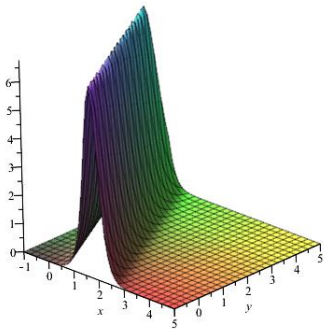
$$\begin{aligned} \Psi_1 &= e^{\theta_1 + i\chi_1}, \\ \Psi_2 &= e^{-\theta_2 + i\chi_2}, \end{aligned}$$

мұнда $\theta_2 = -\theta_1$, $\chi_2 = -\chi_1 + \delta_0$. $\mu_1 = \eta + i\nu$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

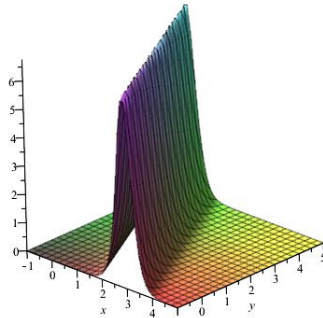
$$\begin{aligned}\theta_1 &= \beta x - \nu y - 2\beta\eta t - 2\alpha\nu t + \delta_1, \\ \chi_1 &= \alpha x + \eta y + 2\alpha\eta t - 2\beta\nu t + \delta_2.\end{aligned}$$

(2+1) өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуі үшін q және ν функциялардың шешімін аламыз және оның графигін 7, 8-суретте бейнеленді:

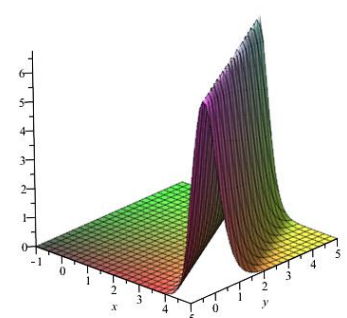
$$\begin{aligned}q^{[1]} &= \frac{4\beta e^{2i\chi_1 - i\delta_0}}{e^{2\theta_1} + e^{-2\theta_1}}, \\ \nu^{[1]} &= -\frac{16\nu\beta}{e^{2\theta_1} + e^{-2\theta_1}}.\end{aligned}\tag{3.85}$$



а



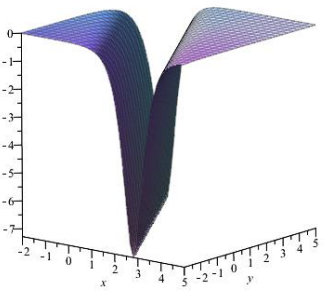
ә



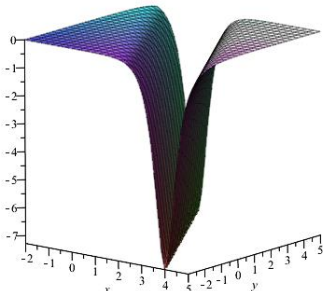
б

а – $t=0.5$; ә – $t=1$; б – $t=2$

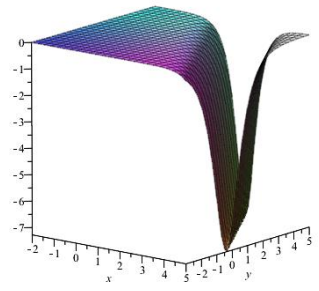
Сурет 7 – Екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуінің $|q^{[1]}|^2$ функциясының әр түрлі уақыт мезетіндегі өзгеру графигі



а



ә

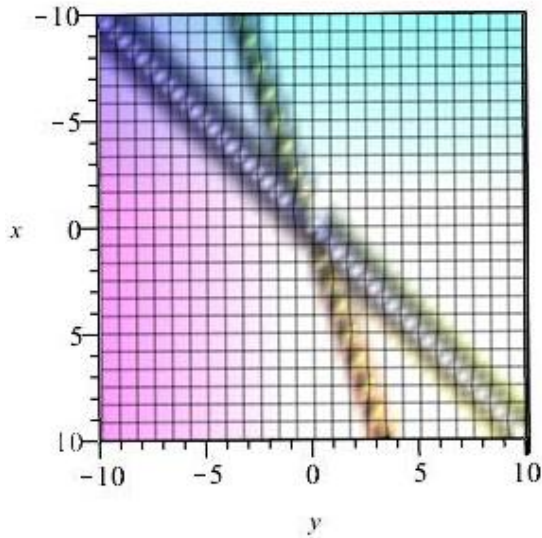


б

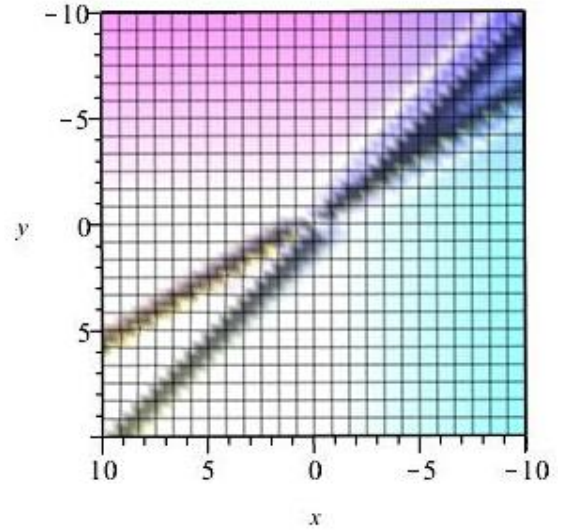
а – $t=0.5$; ә – $t=1$; б – $t=2$

Сурет 8 – Екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуінің $\nu^{[1]}$ функциясының әр түрлі уақыт мезетіндегі өзгеру графигі

Екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуінің екі солитонды шешімін графиктік түрде кескіндеу үшін Maple 2018 бағдарламасы көмегімен сәйкесінше графиктерді алайық (9, 10-суреттер).



Сурет 9 – $\beta = 1.5$ және $t=0$ мезетіндегі $u^{[2]}$ солитонды шешім графигі



Сурет 10 – $\beta = 1.5$ және $t=0$ мезетіндегі $q^{[2]}$ екі солитонды шешім графигі

Бұл бөлімшеде $(2+1)$ өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуі қарастырылды. Осы әдісті қолдана отырып, теңдеудің солитондық шешімін таптық және сол шешімдердің q және v функцияларының бір солитондық шешімінің уақыт бойынша өзгеру графигін тұрғыздық. Сонымен қатар, Maple 2018 бағдарламасы көмегімен екі солитонды шешінің графигі алынды.

3.3.3 Қиратушы толқынды шешімі

Енді құрастырылған Дарбу түрлендіруі негізінде қиратушы толқынды типті шешімдерді алуды қарастырайық. Бұл жағдайда біз «негізгі» шешімді (бастапқы шешім) $q = ie^{it}, v = 1$ қабылдаймыз. Сонда сәйкес сызықты теңдеулер жүйесі

$$\begin{aligned}
 \psi_{1x} &= -\psi_1 + ie^{-it}\psi_2, \\
 \psi_{2x} &= ie^{it}\psi_1 + \psi_2, \\
 \psi_{1t} &= -2i\psi_{1y} - \frac{i}{2}\psi_1, \\
 \psi_{2t} &= -2i\psi_{2y} + \frac{i}{2}\psi_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.86}$$

(3.86) теңдеулер жүйесі келесі нақты шешімдерді қабылдайды

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= [i(2x - y - 1) - 2t]e^{-0,5it}, \\
 \psi_2 &= [2x - y + 1 + 2it]e^{0,5it}.
 \end{aligned}
 \tag{3.87}$$

Меншікті мәндерді қабылдайық

$$\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i.$$

(3.87) мәнін (3.84) және (3.84) орнына қойып, қиратушы толқынды шешімдерін аламыз.

$$q^{[1]} = \left[1 - \frac{4(1-2it)}{1+(2x-y)^2+4t^2} \right] e^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}, \quad (3.88)$$

$$v^{[1]} = 1 + \frac{8}{\Delta} - \frac{16(2x-y)^2}{\Delta^2} \quad (3.89)$$

немесе

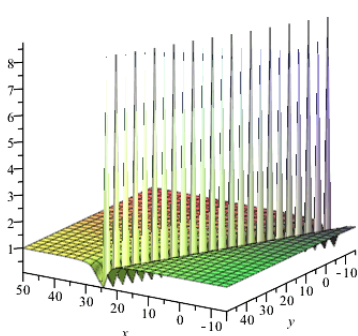
$$v^{[1]} = 1 + 4[\ln \Delta]_{yy},$$

$$|q^{[1]}|^2 = 1 - \frac{8}{\Delta} + \frac{16(1+4t^2)}{\Delta^2},$$

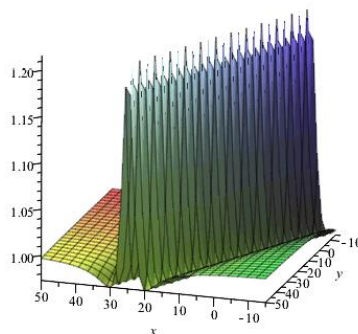
мұнда

$$\Delta = 1 + (2x - y)^2 + 4t^2,$$

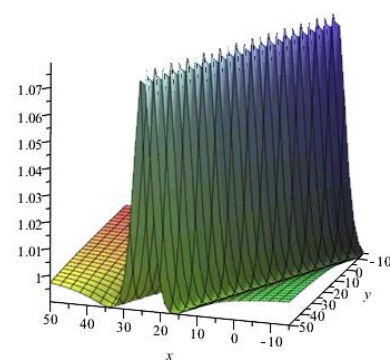
Енді (3.88)-(3.89) шешімдерінің $|q^{[1]}|^2$ және $v^{[1]}$ функцияларының $t=0$; $t=3$; $t=5$ уақыт мезетіндегі графиктерін тұрғызайық (11, 12-суреттер).



а



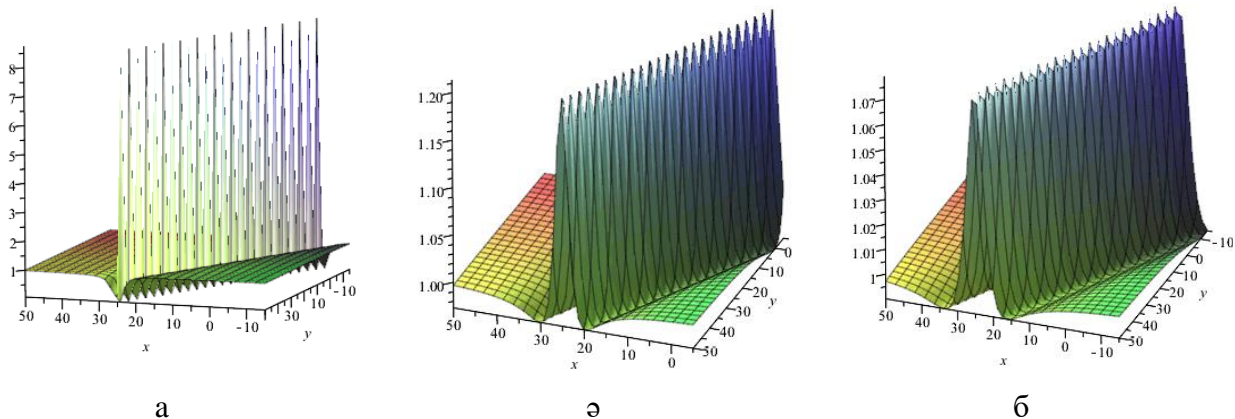
ә



б

а – $t=0$; ә – $t=3$; б – $t=5$

Сурет 11 – Қиратушы толқынды шешімнің графигі $|q^{[1]}|^2$



а – $t=0$; ә – $t=3$; б – $t=5$

Сурет 12 – Қиратушы толқынды шешімнің графигі $v^{[1]}$

Осылайша, екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуі қарастырылды. Атылған теңдеуге Дарбу түрлендіруін жасадық. Құрылған Дарбу түрлендіруінің көмегімен екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуі үшін қиратушы толқынды шешімдері алынады және шешімдердің уақыт бойынша өзгеру динамикасы графикалық түрде ұсынылды. Бұл нәтижелер [187, с. 715-172] жарияланды.

3.3.4 Сақталу заңдары

Сақталу заңдарын табу кванттық физика, гидродинамика, плазма физикасы, оптика сияқты қолданбалы ғылымдардың әр түрлі салаларында мағынасы бар [188-190]. Бейсызықты теңдеу үшін толық интегралданудың анықтамасы бойынша шексіз көп сақталу заңдары бар. Бейсызықты дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін, сақталу заңдарын табудың әр түрлі әдістері жасалуда [191, 192]. Жалпы Нетер теоремасында көрсетілгендей сақталу заңдары мен симметриялар арасындағы байланысқа тәуелді [193, 194]. Физикалық процестер кезінде сақталу заңдары масса, энергия, импульс және электр заряды сияқты кейбір физикалық шамалардың уақыт өте келе өзгермейтінін білдіреді [195]. Математикада сақталу заңдары жақын аймақтағы байланысты ағын әсер ететін шаманы сипаттайтын скалярлық дербес дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталады.

Бейсызықты Шредингер теңдеуі үшін Лакс жұбы (3.78) арқылы сақталу заңдарының шексіз түрін құрастырайық.

Ол үшін келесі шамаларды қабылдайық

$$\rho = (\ln \psi_1)_x, \quad J = -(\ln \psi_1)_t.$$

Онда келесі қатынасты аламыз

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (3.90)$$

жергілікті сақталу заңының нысаны бар. (3.116) теңдігіне сәйкес теңдеулер жүйесінің кез келген шешімі үшін орындалады деп қабылданады, ρ сақталған тығыздық, ал J сақталған ағын деп аталады.

Сәйкесінше сызықты жүйе

$$\begin{aligned} \psi_{1x} &= -i\lambda\psi_1 + q\psi_2, \\ \psi_{2x} &= -r\psi_1 + i\lambda\psi_2, \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\psi_{1t} = -0,5iv\psi_1 + iq_y\psi_2 + 2\lambda\psi_{1y},$$

$$\psi_{2t} = ir_y\psi_1 + 0,5iv\psi_2 + 2\lambda\psi_{2y}.$$

Осы теңдеулерді пайдалана отырып, (3.77) теңдеулер үшін шексіз көп сақталу заңдарын құрастырамыз. Жаңа белгілеулер енгізейік

$$m_1 = \frac{\psi_{1y}}{\psi_1} - \lambda, \quad m_2 = \frac{\psi_{1x}}{\psi_1}, \quad n = \frac{\psi_2}{\psi_1}. \quad (3.92)$$

(3.78), (3.90) теңдеулерінен және үйлесімділік шартынан $(\ln \psi_1)_{yx} = (\ln \psi_1)_{xy}$, немесе $m_{1x} = m_{2y}$ келесі теңдеулерді аламыз.

$$n_x - 2i\lambda n + qn^2 - r = 0, \quad (3.93)$$

$$m_{1x} - (qn)_y = 0. \quad (3.94)$$

Енді m_1 және n өрнектерін келесі түрде жіктейміз:

$$m_1 = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \lambda^{-j}, \quad n = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \lambda^{-j}.$$

(3.92) теңдеулерді (3.93) теңдеулерге қойып, әр λ -ның дәрежесінің коэффициенттері бойынша жинақтап, келесідей рекурсия формуласын алуға болады:

$$\begin{aligned}
\lambda^0: & -2i\chi_1 + r = 0, \\
\lambda^{-1}: & \chi_{1x} - 2i\chi_2 = 0, \\
\lambda^{-2}: & \chi_{2x} - 2i\chi_3 + q\chi_1^2 = 0, \\
\lambda^{-3}: & \chi_{3x} - 2i\chi_4 + 2q\chi_1\chi_2 = 0, \\
& \dots \\
& \chi_{j-1,x} - 2i\chi_j + q \sum_{k=1}^{j-2} \chi_k \chi_{j-1-k} = 0.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

(3.92) теңдеулерді (3.94) теңдеулерге қойып, λ -ның коэффициенттері бойынша жинап, келесідей рекурсия формуласын аламыз:

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1}: & h_{1x} - (q\chi_1)_y = 0, \\
\lambda^{-2}: & h_{2x} - (q\chi_2)_y = 0, \\
\lambda^{-3}: & \chi_{3x} - (q\chi_3)_y = 0, \\
& \dots \\
& h_{j,x} - (q\chi_j)_y = 0.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

(3.95) теңдеулерінен аламыз

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{2i}r, \\
\chi_2 &= -\frac{1}{4}r_x, \\
\chi_3 &= -\frac{1}{8i}(r_{xx} + qr^2)
\end{aligned}$$

(3.96) теңдеулерінен

$$\begin{aligned}
h_{1x} &= \frac{1}{2i}(qr)_y, \\
h_{2x} &= -\frac{1}{4}(qr_x)_y, \\
\chi_3 &= -\frac{1}{8i}(qr_{xx} + |q|^4)_y.
\end{aligned}$$

Келесі белгілеу енгізейік

$$\Theta = \frac{\psi_{1t}}{\psi_1},$$

және (3.91) және (3.92) теңдеулерінің көмегімен аламыз

$$\Theta = -0,5iv + iq_y n + 2\lambda(m_1 + \lambda). \quad (3.97)$$

(3.92) теңдеулері және үйлесімділік шарты арқылы

$$(\ln \psi_1)_{tx} = (\ln \psi_1)_{xt} \quad (3.98)$$

Θ -ның туындысын анықтайық

$$\Theta_x = (qn)_t.$$

Әрі қарай (3.97) теңдеуінің туындыларын алып, (3.98) теңдеуіне теңестіреміз.

$$(qn)_t = -0,5iv_x + i(q_y n)_x + 2\lambda m_{1x}.$$

Теңдеуге n және m_1 мәндерін қойып, әр λ дәрежесінің коэффициенттері бойынша жинап, келесі өрнектерді аламыз

$$\begin{aligned} \lambda^0 : & -0,5iv_x + 2h_{1x} = 0, \\ \lambda^{-1} : & (q\chi_1)_t = i(q_y \chi_1)_x + 2h_{2x}, \\ \lambda^{-2} : & (q\chi_2)_t = i(q_y \chi_2)_x + 2h_{3x}, \\ \dots : & \dots \end{aligned} \quad (3.99)$$

Екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуінің екінші теңдеуі (3.99) теңдеулеріне сәйкес болғандықтан автоматты түрде орнатуға болатынын анықтаймыз. Осы теңдеулерді пайдалана отырып, екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеулері үшін бірінші сақталу заңын келесідей түрде аламыз:

$$D_t(iqr) + D_x \left(\frac{q_y r - q r_y}{2} \right) + D_y \left(\frac{q_x r - q r_x}{2} \right) = 0.$$

Сонымен қатар, екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуі үшін сақталу заңдарының шексіз саны (3.125) көмегімен ұқсас түрде құрастырылады.

Бұл жұмыста Лакс жұбы бар екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеулері үшін сақталу заңдарының шексіз жиынтығын алдық. Осы әдіс

негізінде Лакс жұбы бар басқа көпөлшемді теңдеулер үшін сақталу заңдарының шексіз жиынтығын құруға болады. Жұмыстың нәтижелері [189, с.5] жарияланды.

Сонымен үшінші бөлім бойынша қорытындыласақ, екі өлшемді Шредингер-Максвелл-Блох теңдеулері, Хирота жүйесі және бейсызықты Шредингер теңдеуі зерттелінді. Бұл теңдеулер барлығы интегралданатын теңдеу және сәйкесінше Лакс жұптары берілген. Ал осы аталған теңдеулерге Дарбу түрлендіру әдісі, \tanh әдісімен және т.б. әдістерді қолдана отырып, олардың солитондық шешімдері құрастырылады. Алынған шешімдердің уақыт бойынша өзгеру графиктері Maple 2017 бағдарламасының көмегімен тұрғызылды.

ҚОРЫТЫНДЫ

Жұмыста негізгі мақсаттарға қол жеткізу және алға қойылған міндеттерді шешу нәтижесінде ғылыми дәлелдерге негізделген жаңа теориялық нәтижелер қамтылған. Алынған нәтижелердің жиынтығы бейсызықты физика саласындағы зерттеулерді дамыту үшін үлкен маңызға ие.

Диссертациялық жұмысқа сәйкес келесідей **қорытынды** жасауға болады:

1. Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделінде потенциал $W = 0$ болса, онда ол Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделіне келеді, ол комплексті байланысқан дисперсиясыз Конно-Ооно теңдеуімен және калибровті эквивалентті болады.

2. Комплексті байланысқан дисперсиясыз Конно-Ооно теңдеуінің солитонды шешімі құрылды және оның уақыт бойынша өзгеру динамикасы зерттелінді.

3. Оптикалық талшықтардағы ультра қысқа бейсызықты жарық импульстерінің таралуын сипаттайтын Фокас-Ленеллс теңдеуіне сәйкес келетін жаңа спиндік жүйе құрылды, Лакс жұбы анықталды.

4. Келісілген көздері бар Гейзенбергтің жалпыланған ферромагнетик моделінде спиндік вектор \mathbf{A} және базистік вектор \mathbf{e}_1 тепе-тең ($\mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_1$) болғанда, комплексті қысқа импульсты теңдеудің жалпыланған түрімен өзара геометриялық және калибровті эквивалентті болады.

5. Ферромагнетиктердегі спиндік толқындарды сипаттайтын екі өлшемді бейсызықты Шредингер теңдеуінің $\delta = 1$ «тартылыс» кезінде Дарбу түрлендіру әдісі арқылы бір, екі солитонды шешімдері, қиратушы толқынды шешімдері құрылды. Екі солитонның соқтығысуы серпімді, яғни әсерлескеннен кейін өзінің пішінін мен жылдамдығын сақтайды, шексіз сақталу заңдары бар.

Диссертациялық жұмыста алынған барлық нәтижелер математикалық аспектілермен шектелгенімен, бейсызықты солитонды модельдерді зерттеу, олардың өзара әсерлесуі және қасиеттері туралы түсінігімізді кеңейтеді. Теориялық зерттеулерден алынған іргелі білім ұзақ мерзімді құндылыққа ие және әртүрлі ғылыми және технологиялық бағыттарда қолданылуы мүмкін.

Қорытындылай келе, диссертациялық жұмысты орындау барысында көрсеткен барлық көмектері үшін ғылыми жетекшім ҚР ҰҒА академигі, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ратбай Мырзакуловқа, шетелдік ғылыми жетекшім Дуглас Сиглетонға және диссертациялық жұмысты талқылауға ат салысқан Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің жалпы және теориялық физика кафедрасының профессор-оқытушылар құрамына өз алғысымды білдіремін.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Ахиезер И.А., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
- 2 Молоземов Д., Слонзуески Дж. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. – М.: Мир, 1982. – 348 с.
- 3 Рахимов Ф.К. Исследование нелинейных локализованных явлений в магнитных системах: дис. ... док. физ.-матем. ... наук: 01.04.02. – Душанбе, 2005. – 293 с.
- 4 Абдуллаев Ф.Х. Динамика магнитных солитонов под действием фононных флуктуации в квазиодномерных магнетиках // ФМН. – 1984. – Т. 57, №125(3). – С. 450-456.
- 5 Fedyanin V.K. Dynamical formfactor of neutron scattering on solitons in quasi-one-dimensional magnets // JMM. – 1983. – Vol. 31, №34. – P. 1237.
- 6 Гуревич А.Г. Нелинейные процессы в ферритах в поле СВЧ // В кн. Ферромагнитный резонанс. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 285-317.
- 7 Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. – М.: Наука, 1971. – 376 с.
- 8 Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. – М.: Наука, 1994. – 461 с.
- 9 Philip E. Wigen Nonlinear phenomena and chaos in magnetic materials. – London: World Scientific Publisher, 1994. – 248 p.
- 10 Шешукова С.Е. Нелинейные магнитостатические волны в слоистых ферромагнитных кристаллах: дис. ... физ.-матем. наук: 01.04.03. – Саратов, 2012. – 129 с.
- 11 Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / пер. с англ. – М.: Физматлит, 2005. – 647 с.
- 12 Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки / пер. с англ. – М.: Физматлит, 2003. – 299 с.
- 13 Agrawal G. Fiber-Optic. Communication Systems. – New Jersey: John Wiley & Sons. Inc, 2002. – 561 p.
- 14 Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1983. – Т. 84, №2. – С. 606-615.
- 15 Черкасский М.А. Исследование солитонов огибающей электромагнитно-спиновых волн в ферромагнитных пленках и мультиферроидных структурах: дис. канд. физ.-матем. наук: 01.04.03. – СПб., 2013. – 125 с.
- 16 Gubbiotti G., Tacchi S., Carlotti G. et al. Magnetostatic interaction in arrays of nanometric permalloy wires: A magneto-optic Kerr effect and a Brillouin light scattering study // Phys. Rev. B. – 2005. – Vol. 72. – P. 224413.
- 17 Jung S., Watkins B., DeLong L. et al. Ferromagnetic resonance in periodic particle arrays // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 66. – P. 132401.

- 18 Bijoy K., Camley R.E., Celinski Z. Narrowing of the frequency-linewidth in structured magnetic strips: Experiment and theory // *Appl. Phys. Lett.* – 2005. – Vol. 87. – P. 012502.
- 19 Guslienko K.Y., Slavin A.N. Boundary conditions for magnetization in magnetic nanoelements // *Phys. Rev. B.* – 2005. – Vol. 72. – P. 01446.
- 20 Bayer C., Demokntov S.O., Hillebrands B. et al. Spin-wave wells with multiple states created in small magnetic elements // *Appl. Phys. Lett.* – 2003. – Vol. 82, Issue 4. – P. 607-609.
- 21 Camley R.E., McGrath B.V., Khivintsev Y. et al. Effect of cell size in calculating frequencies of magnetic modes using micromagnetics: Special role of the uniform mode // *Phys. Rev. B.* – 2008. – Vol. 78. – P. 024425.
- 22 Бутко А.В. Исследование процессов намагничивания в микроструктурах на основе тонких магнитных пленок // *Нелинейный мир.* – 2006. – Т. 4, №6. – С. 320-321.
- 23 Filimonov Y.A., Butko A.V., Kozhevnikov A.V. et al. Ferromagnetic resonance investigation of permalloy particles array structures // *Proceeding of SPIE.* – 2004. – Vol. 5401. – P. 525-531.
- 24 Lakshamanan M. Continuum spin system as an exactly soluble dynamical system // *Phys. Lett. A.* – 1977. – Vol. 61, Issue 1. – P. 53-54.
- 25 Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method // *Phys. Lett. A.* – 1977. – Vol. 64, Issue 2. – P. 235-237.
- 26 Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 528 с.
- 27 Боровик А.Е. N-солитонные решения нелинейного уравнения Ландау–Лифшица // *Письма в ЖЭТФ.* – 1978. – Т. 28, №10. – С. 629-632.
- 28 Borovik A.E. Exact integration on the nonlinear Landau-Lifshitz equation // *Sol. St. Comm.* – 1980. – Vol. 34, Issue 8. – P. 721-722.
- 29 Borovik A.E. Solitons investigations in nonlinear dynamics – new concept. – Poznan: Polish Academy of Sciences, 1980. – 113 p.
- 30 Боровик А.Е., Робук В.Н. Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау–Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией // *ТМФ.* – 1981. – Т. 46, №3. – С. 371-381.
- 31 Боровик А.Е., Кулинич С.И. Интегрирование нелинейной динамики одноосного ферромагнетика методом обратной задачи рассеяния // *Письма в ЖЭТФ.* – 1984. – Т. 39, №7. – С. 320-324.
- 32 Borovik A.E., Klama S., Kulinich S.I. Integration of the Landau–Lifshitz equation with preferred-axis anisotropy by the method of the inverse scattering problem // *Physica D.* – 1988. – Vol. 32. – P. 107-134.
- 33 Косевич А.М., Иванов Е.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности: динамические и топологические солитоны. – Киев: Наук. думка, 1983. – 192 с.
- 34 Ivanov B.A., Kosevich A.M., Manshos I.V. Algebraic soliton in a ferromagnet in the presence of the magnetic field directed along the anisotropy axis // *Sol. St. Comm.* – 1980. – Vol. 34, Issue 6. – P. 417-418.

35 Sasada T.J. Magnons, solitons and a critical field in the Heisenberg ferromagnetic chain with easy-plane anisotropy // J. Phys. Soc. Jpn. – 1982. – Vol. 51, Issue 8. – P. 2446-2449.

36 Косевич А.М., Воронов В.П., Манжос И.В. Нелинейные коллективные возбуждения в легкоплоскостном магнетике // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 84, №1. – С. 148-160.

37 Бабич И.М., Косевич А.М., Манжос И.В. Локализованные в пространстве периодические во времени магнитные возбуждения // ФНТ. – 1983. – Т. 9, №6. – С. 636-644.

38 Борисов А.Б., Киселев В.В. Динамика квазиодномерного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» // ФММ. – 1984. – Т. 58, №2. – С. 238-251.

39 Borisov A.B., Kiseliev V.V. Dynamical solitons in a quasi-one-dimensional ferromagnet with easy plane type anisotropy // Physica D. – 1986. – Vol. 19. – P. 411-422.

40 Mikhailov A.V. et al. Integrable magnetic models // Modern problem in condensed mat. – 1986. – Vol. 17, Ch. 13. – P. 623-690.

41 Михайлов А.В., Яремчук А.И. Аксиально-симметричные решения двумерной модели Гейзенберга // Письма в ЖЭТФ. – 1982. – Т. 36, №3. – С. 75-77.

42 Borisov A.B., Kiseliev T.T. Two-dimensional solutions of the Landau–Lifshitz equation // Phys. Lett. A. – 1985. – Vol. 107, Issue 4. – P. 161-163.

43 Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г. Дисклинации в изотропном антиферромагнетике // Исследования по физике кинетических явлений: сб. ст. – Свердловск: АН СССР, УНЦ, 1984. – С. 118-126.

44 Torres L., Lopez-Dias L., Iniguez J. Micromagnetic tailoring of periodic antidot permalloy arrays for high density storage // Appl. Phys. Lett. – 1998. – Vol. 73. – P. 3766-3768.

45 Kruglyak V.V., Demokritov S.O., Grundler D. Magnonics // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2010. – Vol. 43. – P. 264001-1-264001-14.

46 Высоцкий С.Л. и др. Магнитостатические спиновые волны в двумерных периодических структурах - магнито-фотонных кристаллах // ЖЭТФ. – 2005. – Т. 128, №3(9). – С. 636-644.

47 Высоцкий С.Л., Кожевников А.В. и др. Параметрическая неустойчивость поверхностных магнитостатических волн в двумерных магнетонных кристаллах // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2007. – Т. 15, №3. – С. 58-73.

48 Высоцкий С.Л., Никитов С.А., Новицкий Н.Н. и др. Спектры потери поверхностных магнитостатических волн в одномерном магнетонном кристалле // ЖТФ. – 2011. – Т. 81, №2. – С. 150-152.

49 Устинов А.Б., Григорьева Н.Ю., Калиникос Б.А. Наблюдение солитонов огибающей спиновых волн в периодических магнитных пленочных структурах // ПЖЭТФ. – 2008. – Т. 88, №1. – С. 34-39.

50 Дроздовский А.В., Черкасский М.А., Устинов А.Б. и др. Образование солитонов огибающей при распространении спин-волновых пакетов в

тонкопленочных магнетонных кристаллах // ПЖЭТФ. – 2010. – Т. 91, №1. – С. 17-22.

51 Landau L.D., Lifshitz E.M. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies // Phys. Zs. der Sowjetunion. – 1935. – Vol. 8, Issue 2. – P. 153-164.

52 Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P. Statistical Physics. – М.: Nauka, 1978. – Part 2. – 448 p.

53 Akhiezer A.I., Bar'yakhtar V.G., Peletminskii S.V. Spin Waves. – М.: Nauka, 1967. – 367 p.

54 Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические волны в неоднородных полях. – М.: Физматлит, 2016. – 360 с.

55 Lakshmanan M. The fascinating world of the Landau–Lifshitz–Gilbert equation: an overview // Phil. Trans. R. Soc. A. – 2011. – Vol. 369. – P. 1280-1300.

56 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G. et al. A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Physics Letters A. – 1997. – Vol. 233, Issue 4-6. – P. 391-396.

57 He J.-S., Cheng Y., Li Y.-S. The Darboux Transformation for NLS-MB Equations // Commun. Theor. Phys. – 2002. – Vol. 38. – P. 493-496.

58 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Syzdykova R. et al. On the simplest (2+1) dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear Schrodinger equations // J. Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 2122-2139.

59 Myrzakulov R., Lakshmanan M., Vijayalakshmi S. et al. Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions // J. Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 3765-3771.

60 Myrzakulov R., Danlybaeva A.K., Nugmanova G.N. Geometry and multidimensional soliton equations // Theoretical and Mathematical Physics. – 1999. – Vol. 118, Issue 3. – P. 441-451.

61 Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence between (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations // Journal of Physics A: Mathematical & Theoretical. – 1998. – Vol. 31, Issue 47. – P. 9535-9545.

62 Wahlquist H.D., Estabrook F.B. Prolongation Structures of Nonlinear Evolution Equations // J. Math. Phys. – 1976. – Vol. 17. – P. 1293-1297.

63 Hermann R. Pseudopotentials of Estabrook and Wahlquist, the Geometry of Solitons, and the Theory of Connections // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 36. – P. 835.

64 Morris C. Soliton stability in systems of two real scalar fields // J. Math. Phys. – 1977. – Vol. 18. – P. 533-1-533-17.

65 Coronas J. Generalized solitons of the Schrodinger equation // J. Math. Phys. – 1976. – Vol. 18. – P. 163.

66 Lamb G.L. Backlund transformations at the turn of the century // Lect. Notes in Mathem. – 1976. – Vol. 515. – P. 69-79.

67 Hermann R. Inverse Scattering Technique of Soliton Theory, Lie Algebras, the Quantum Mechanical // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 37. – P. 1591-1-1591-17.

- 68 Lamb G.L. Solitons on moving space curves // J. Math. Phys. – 1977. – Vol. 18. – P. 1654-1661.
- 69 Lakshmanan M. On the geometrical interpretation of solitons // Phys. Lett. – 1978. – Vol. 64, Issue 4. – P. 354-356.
- 70 Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга // Теор. ат. физ. – 1979. – Т. 38, №1. – С. 26-34.
- 71 Chi Ch., Zi-Xiang Zh. Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-I Equations // Chin. Phys. Lett. – 2009. – Vol. 26, Issue 8. – P. 080504-1-080504-4.
- 72 Feng B.-F. Complex short pulse and coupled complex short pulse equations // Physica D. – 2015. – Vol. 297. – P. 62-75.
- 73 Feng B.-F., Maruno K., Ohta Y. Geometric formulation and multi-dark soliton solution to the defocusing complex short pulse equation // Studies in applied mathematics. – 2017. – Vol. 138, Issue 3. – P. 343-367.
- 74 Жунусова Ж.Х. Геометрия и точные солитонные решения уравнения Янга-Миллса-Хиггса и его редукций: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.02. – Алматы, 2003. – 140 с.
- 75 Kakuata H., Konno K. A generalization of coupled integrable dispersionless system // J. Phys. Soc. Japan. – 1996. – Vol. 65. – P. 340-341.
- 76 Konno K., Oono H. New coupled integrable dispersionless equations // J. Phys. Soc. Japan. – 1994. – Vol. 63. – P. 377-378.
- 77 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable nonlocal nonlinear equations // Stud. Appl. Math. – 2017. – Vol. 139. – P. 7-59.
- 78 Chen K., Deng X., Lou S. et al. Solutions of nonlocal equations reduced from the AKNS hierarchy Stud // Appl. Math. – 2018. – Vol. 141. – P. 113-141.
- 79 Feng B.F., Maruno K., Ohta Y. Geometric formulation and multi-dark soliton solution to the defocusing complex short pulse equation // Stud. Appl. Math. – 2017. – Vol. 138. – P. 343-367.
- 80 Hassan M. Darboux transformation of the generalized coupled dispersionless integrable system // J. Phys. A. – 2009. – Vol. 42. – P. 065203-1-065203-17.
- 81 Kakuata H., Konno K. Canonical formulation of a generalized coupled dispersionless system // J. Phys. A. – 1997. – Vol. 30. – P. L401-L407.
- 82 Konno K., Oono H. New coupled integrable dispersionless equations // J. Phys. Soc. Japan. – 1994. – Vol. 63. – P. 377-378.
- 83 Kuetche V.K., Bouetou T.B., Kofane T.C. On exact Nloop soliton solution to nonlinear coupled dispersionless evolution equations // Phys. Lett. A. – 2008. – Vol. 372. – P. 665-669.
- 84 Zh. Sagidullayeva, G. Nugmanova, R. Myrzakulov, Integrable surfaces induced by generalized Landau-Lifshitz equation with self-consistent potential// J.Phys. Conf. Ser. -2023. –Vol. 1416. -P. 012029.
- 85 Zhassybayeva M., Bekova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Integrable motions of curves of the induced Fokas–Lenells equation // Optik. – 2023. – Vol. 286. – P. 170979.

- 86 Sergyeyev A. Integrable (3+1)-dimensional systems with rational Lax pairs // *Nonlinear Dynamics*. – 2018. – Vol. 91. – P. 1677-1680.
- 87 Szablikowski B.M., Blaszk M. Meromorphic Lax representations of (1+1)-dimensional multi-Hamiltonian dispersionless systems // *J. Math. Phys.* – 2006. – Vol. 47. – P. 092701-1-092701-28.
- 88 Blaszk M., Szablikowski B.M. From dispersionless to soliton systems via Weyl-Moyal like deformations // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2003. – Vol. 36. – P. 12189-12203.
- 89 Blaszk M., Szablikowski B.M. Classical R-matrix theory of dispersionless systems: I. (1+1)-dimension theory // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2002. – Vol. 35. – P. 10325-10348.
- 90 Bogdanov L.V., Pavlov M.V. Six-dimensional heavenly equation. Dressing scheme and the hierarchy // *Physics Letters A*. – 2019. – Vol. 383. – P. 10-14.
- 91 K. Konno and H. Oono, New coupled dispersionless equation // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1994. – Vol. 63. – P. 377-378.
- 92 Kakuata H., Konno K. A generalization of coupled integrable, dispersionless system // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1996. – Vol. 65. – P. 340-341.
- 93 Kotlyarov V.P. On equations gauge equivalent to the sine-Gordon and Pohlmeyer-Lund-Regge equation // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1994. – Vol. 63, Issue 10. – P. 3535-3537.
- 94 Melnikov V.K. Capture and confinement of solitons in nonlinear integrable systems // *Commun. Math. Phys.* – 1989. – Vol. 120. – P. 451-468.
- 95 Melnikov V.K. Interaction of solitary waves in the system described by the Kadomtsev-Petviashvili equation with a self-consistent source // *Commun. Math. Phys.* – 1989. – Vol. 126. – P. 201-215.
- 96 Melnikov V.K. Integration of the Korteweg-de Vries Equation with a Source // *Inverse Problems*. – 1990. – Vol. 6. – P. 233-246.
- 97 Kaup D.J. Integrable ponderomotive system: Cavitons are solitons // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – Vol. 59. – P. 2063-2067.
- 98 Leon J., Latifi A. Mathematical and general solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1990. – Vol. 23. – P. 1385-1403.
- 99 Claude C., Latifi A., Leon J. Nonlinear resonant scattering and plasma instability: An integrable model // *J. Math. Phys.* – 1991. – Vol. 32. – P. 3321-3330.
- 100 Doktorov E.V., Vlasov R.A. Spatial Solitons in Media with Delayed-Response Optical Non-Linearities // *Europhysics Lett.* – 1994. – Vol. 26(N7). – P. 487-492.
- 101 Doktorov E.V., Vlasov R.A. Optical solitons in media with resonant and non-resonant self-focusing nonlinearities // *Opt. Acta*. – 1983. – Vol. 30. – P. 223-232.
- 102 Nakazawa M., Yomada E., Kubota H. Coexistence of self-induced transparency soliton and nonlinear Schrödinger soliton // *Phys. Rev. Lett.* – 1991. – Vol. 66. – P. 2625-2629.
- 103 Doktorov E.V., Shchesnovich V.S. Nonlinear evolutions with singular dispersion laws associated with a quadratic bundle // *Phys. Lett. A*. – 1995. – Vol. 207. – P. 153-158.

- 104 Shchesnovich V.S., Doktorov E.V. Modified Manakov system with self-consistent source // *Phys. Lett. A.* – 1996. – Vol. 213. – P. 23-31.
- 105 Melnikov V.K. New method for deriving nonlinear integrable systems // *J. Math. Phys.* – 1990. – Vol. 31. – P. 1106-1113.
- 106 Leon J., Spectral transform and solitons for generalized coupled Bloch systems // *J. Math. Phys.* – 1988. – Vol. 29. – P. 2012-2019.
- 107 Melnikov V.K. Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // *Phys. Lett. A.* – 1988. – Vol. 133. – P. 493-496.
- 108 Lin R.L., Zeng Y.B., Ma W.X. Solving the KdV hierarchy with self-consistent sources by inverse scattering method // *Physica A.* – 2001. – Vol. 291. – P. 287-298.
- 109 Schäfer T., Wayne C.E. Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media // *Physica D.* – 2004. – Vol. 196. – P. 90-105.
- 110 Chung Y., Jones C.K.R.T., Schäfer T. et al. Ultra-short pulses in linear and nonlinear media // *Nonlinearity.* – 2005. – Vol. 18. – P. 1351-1374.
- 111 Rabelo M.L. On equations which describe pseudospherical surfaces // *Stud. Appl. Math.* – 1989. – Vol. 81. – P. 221-248.
- 112 Lakshmanan M., Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system // *Phys. Lett. A.* – 1977. – Vol. 61. – P. 53-54.
- 113 Takhtajian L., Integration of continuous heisenberg spin chain through inverse scattering method // *Phys. Lett. A.* – 1977. – Vol. 64. – Vol. 235-237.
- 114 Anco S.C., Myrzakulov R. Integrable generalizations of Schrödinger maps and Heisenberg spin models from Hamiltonian flows of curves and surfaces // *J. Geometry Phys.* – 2010. – Vol. 60. – P. 1576-1603.
- 115 Chi C., Zi-Xiang Z. Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-I Equations // *Chin. Phys. Lett.* – 2009. – Vol. 26, Issue 8. – P. 080504-1-080504-5.
- 116 Hai C., Zi-Xiang Z. Darboux Transformation with a Double Spectral Parameter for the Myrzakulov-I Equation // *Chin. Phys. Lett.* – 2014. – Vol. 31, Issue 12. – P. 120504.
- 117 Yan Z.-W., Chen M.-R., Wu K. et al. (2 + 1)-Dimensional integrable Heisenberg supermagnet model // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 2012. – Vol. 81. – P. 094006.
- 118 Zhao-Wen Y., Min-Ru C., Ke W. et al. Integrable deformations of the (2 + 1)-dimensional Heisenberg ferromagnetic model // *Commun. Theor. Phys.* – 2012. – Vol. 58. – P. 463-468.
- 119 Esmakhanova K.R., Nugmanova G.N. et al. Integrable inhomogeneous Lakshmanan-Myrzakulov equation // <https://arxiv.org/abs/nlin/0604034v1>. 10.05.2021.
- 120 Zhang Z.-H., Deng M. et al. On the integrable inhomogeneous Myrzakulov-I equation // <https://arxiv.org/abs/nlin/0604034v1>. 10.05.2021.
- 121 Martina L. et al. Deformation of surfaces, integrable systems, and Chern-Simons theory // *J. Math. Phys.* – 2001. – Vol. 42, Issue 13. – P. 1397-1417.
- 122 Wu X.-Y., Tian B., Zhen H.-L. et al. Solitons for the (2 + 1)-dimensional nonlinear Schrödinger–Maxwell–Bloch equations in an erbium-doped fibre // *J. Mod. Opt.* – 2015. – Vol. 63. – P. 590-597.

- 123 Hussien R.A., Mohamed S.G. Generated surfaces via inextensible flows of curves in R^3 // J. Appl. Math. – 2016. – Vol. 2016, Issue 1. – P. 1-8.
- 124 Bekova G., Nugmanova G., Shaikhova G. et al. Coupled dispersionless and generalized heisenberg ferromagnet equations with self-consistent sources: Geometry and equivalence // International Journal Geometrical Methods in Modern Physics. – 2020. – Vol. 17, Issue 7. – P. 2050104-01-2050104-19.
- 125 Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Darboux transformation and soliton solution for generalized Konno-Oono Equation // Journal of Physics: Conference Series. -2019. -Vol.1416, N1. -P. 012003.
- 126 Zhunussova Zh.Kh., Yesmakhanova K.R., Tungushbaeva D.I. et al. Integrable Heisenberg ferromagnet equations with selfconsistent potentials // <https://arxiv.org/abs/1301.1649v2>. 04.05.2021.
- 127 Wang L.H., Porsezian K., He J.S. Breather and Rogue wave solutions of a generalized nonlinear Schrodinger equation // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 87. – P. 053202.
- 128 He J., Xu S., Porseizan K. N-order bright and dark rogue waves in a resonant erbium-doped fibre system // Phys. Rev. E. – 2012. – Vol. 86. – P. 066603.
- 129 Xu S., He J. The Rogue wave and breather solution of the Gerdjikov-Ivanov equation // <https://arxiv.org/abs/1109.3283>. 05.08.2021.
- 130 He J., Xu S., Cheng Y. The rational solutions of the mixed nonlinear Schrödinger equation // <https://arxiv.org/abs/1407.6917v1>. 05.08.2021.
- 131 Zhang Y., Li C., He J. Rogue waves in a resonant erbium-doped fiber system with higherorder effects // Applied Mathematics and Computation. – 2016. – Vol. 273. – P. 826-841.
- 132 Shan S., Li C., He J. On Rogue wave in the Kundu-DNLS equation // Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2013. – Vol. 18, Issue 12. – P. 3337-3349.
- 133 Senthilkumar C., Lakshmanan M., Grammaticos B. et al. Nonintegrability of imagedimensional continuum isotropic Heisenberg spin system: Painleve analysis // Phys. Lett. A. – 2006. – Vol. 356. – P. 339-345.
- 134 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Syzdykova R. et al. On the simplest (2+1)-dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear Schrödinger equations // J.Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 2122-2139.
- 135 Myrzakulov R., Lakshmanan M., Vijayalakshmi S. et al. Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions // J. Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 3765-3771.
- 136 Myrzakulov R., Danlybaeva A.K., Nugmanova G.N. Geometry and multidimensional soliton equations // Theor. Math. Phys. – 1999. – Vol. 118, Issue 13. – P. 441-451.
- 137 Myrzakulov R., Rahimov F.K., Myrzakul K. et al. On the geometry of stationary Heisenberg ferromagnets // In book: Non-linear waves: classical and quantum aspects. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. – P. 543-549.
- 138 Myrzakulov R., Serikbaev N.S., Myrzakul K. et al. On continuous limits of some generalized compressible Heisenberg spin chains // J. NATO Sci. – 2004. – Vol. 153. – P. 535-542.

- 139 Myrzakulov R.: Integrability of the Gauss-Codazzi-Mainardi equation in 2+1 dimensions // *Mathematical problems of nonlinear dynamics. proceed. of the internat. conf. on progress in nonlinear sciences.* – N-Novgorod, 2001. – P. 314-319.
- 140 Zhao-Wen Y., Min-Ru C., Ke W. et al. Integrable deformations of the (2+1)-dimensional Heisenberg Ferromagnetic model // *Commun. Theor. Phys.* – 2012. – Vol. 58. – P. 463-468.
- 141 Ablowitz M. J., Clarkson P. A., *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 516 p.
- 142 Hirota R. *The Direct Methods in Soliton Theory.* – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 200 p.
- 143 Matveev V.B., Salle M.A. *Darboux Transformations and Solitons.* – Berlin: Springer, 1991. – 120 p.
- 144 Rogers C., Schief W.K. *Backlund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory.* – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 413 p.
- 145 Yesmakanova K.R., Shaikhova G.N., Bekova G.T. et al. Determinant Representation of Darboux transformation for the (2+1)-Dimensional Schrodinger-Maxwell-Bloch Equation // *Advances in Intelligent Systems and Computing.* – 2016. – Vol. 441. – P. 183-198.
- 146 Bluman G.W., Kumei S. *Symmetries and Differential Equations.* – NY.: Springer, 1989. – 412 p.
- 147 Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* – Ed. 2nd. – NY.: Springer, 1993. – 513 p.
- 148 Porsezian K., Nakkeeran K. Optical Soliton Propagation in an Erbium Doped Nonlinear Light Guide with Higher Order Dispersion // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – Vol. 74. – P. 2941-2944.
- 149 Li Ch., He J. Darboux transformation and positons of the inhomogeneous Hirota and the Maxwell-Bloch equation // *Science China Physics, Mechanics & Astronomy.* – 2014. – Vol. 57. – P. 898-907.
- 150 Yang J., Li Ch., Li T. et al. Darboux Transformation and Solutions of the Two-Component Hirota-Maxwell-Bloch System // *Chinese Physics Letters.* – 2013. – Vol. 30. – P. 104201-1-104201-5.
- 151 Li Ch., He J., Porsezian K. Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations // *Physical Review E.* – 2013. – Vol. 87. – P. 012913.
- 152 Myrzakulov R., Mamyrbekova G.K., Nugmanova G.N. et al. Integrable (2+1)-Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials // *Symmetry.* – 2015. – Vol. 7, Issue 3. – P. 1352-1375.
- 153 Yesmakanova K.R., Shaikhova G.N., Bekova G.T. et al. Soliton solutions of the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch equations // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2016. – Vol. 738. – P. 012018-1-012018-7.
- 154 Yesmakanova K.R., Shaikhova G.N., Bekova G.T. Soliton solutions of the Hirota's system // *Proceed. internat. conf. on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016).* – NY., 2016. – P. 020147-1-020147-5.

- 155 Ablowitz K.J., Kaup D.J., Newell A.C. et al. Nonlinear-Evolution Equations of Physical Significance // *Phys. Rev. Lett.* – 1973. – Vol. 31. – P. 125-127.
- 156 Yesmakhanova K., Shaikhovala G., Bekova G. et al. Exact solutions for the (2+1)-dimensional Hirota-Maxwell-Bloch system // *Proceed. Internat. conf. on Functional Analysis In Interdisciplinary Applications (FAIA 2017)*. – Astana, 2017. – P. 060022-1-060022-7.
- 157 Kaup D.J., Newell A.C.J. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation // *Math. Phys.* – 1978. – Vol. 19. – P. 798-801.
- 158 Wadati M., Konno K., Ichikawa Y.H. A Generalization of Inverse Scattering Method // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1979. – Vol. 46. – P. 1965-1966.
- 159 Degasperis A. On the conservation laws associated with Lax equations // *Lett. Nuovo Cimento.* – 1982. – Vol. 33. – P. 425-432.
- 160 Fokas A.S. Symmetries and Integrability // *Stud. Appl. Math.* – 1987. – Vol. 77. – P. 253-299.
- 161 Hereman W. Symbolic computation of conservation laws of nonlinear partial differential equations in multi-dimensions // *Int. J. Quantum Chem.* – 2006. – Vol. 106. – P. 278-299.
- 162 Hereman W., Colagrosso M., Sayers R. et al. Continuous and Discrete Homotopy Operators and the Computation of Conservation Laws // *Differential Equations with Symbolic Computation: proced. conf.* – Basel: Birkhäuser, 2005. – P. 255-290.
- 163 Anderson I.M. *The Variational Bicomplex.* – Logan (Utah), 2004. – 318 p.
- 164 Krasilshchik I.S., Vinogradov A.M. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics.* – Providence, 1998. – 349 p.
- 165 Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* – NY.: Springer Verlag, 1993. – 516 p.
- 166 Lu X., Peng M. Systematic construction of infinitely many conservation laws for certain nonlinear evolution equations in mathematical physics // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* – 2013. – Vol. 18. – P. 2304-2312.
- 167 Gao Zh., Gao Y., Su Ch. et al. Lax Pair, Conservation Laws, Solitons, and Rogue Waves for a Generalised Nonlinear Schrödinger–Maxwell–Bloch System under the Nonlinear Tunneling Effect for an Inhomogeneous Erbium-Doped Silica Fibre // *Naturforsch.* – 2016. – Vol. 71, Issue 1. – P. 9-20.
- 168 Wang P., Tian B., Liu W. et al. Lax pair, conservation laws and N-soliton solutions for the extended Korteweg-de Vries equations in fluids // *Eur. Phys. J. D.* – 2011. – Vol. 61. – P. 701-708.
- 169 Zhang H., Tian B., Meng X. et al. Conservation laws, soliton solutions and modulational instability for the higher-order dispersive nonlinear Schrödinger equation // *Eur. Phys. J. B.* – 2009. – Vol. 72. – P. 233-239.
- 170 Guo R., Tian B., Lu X. et al. Darboux Transformation and Soliton Solutions for the Generalized Coupled Variable–Coefficient Nonlinear Schrodinger-Maxwell-Bloch System with Symbolic Computation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* – 2012. – Vol. 52, Issue 4. – P. 565-577.
- 171 Hisakado M., Wadati M. Integrable Multi-Component Hybrid Nonlinear Schrödinger Equations // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1995. – Vol. 64. – P. 408-413.

172 Shaikhova G., Yesmakhanova K., Bekova G. et al. Conservation laws of the Hirota-Maxwell-Bloch system and its reductions // *Proceed. 6th internat. conf. on Mathematical Modelling in Physical Sciences (IC-MSQUARE 2017)*. – Pafos (Cyprus), 2017. – P. 012098.

173 He J., Yi C., Li Y.-S. The Darboux transformation for NLS-MB equations // *Commun. Theor. Phys.* – 2002. – Vol. 38, Issue 4. – P. 493-496.

174 Myrzakulov R., Mamyrbekova G.K., Nugmanova G.N. et al. Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials: relation to spin systems and soliton equations // *Phys. Lett. A.* – 2014. – Vol. 378. – P. 2118-2123.

175 Bindu S.G., Mahalingam A., Porsezian K. Dark soliton solutions of the coupled Hirota equation in nonlinear fiber // *Phys. Lett. A.* – 2001. – Vol. 286. – P. 321-331.

176 Gui M., Zhenyun Q. Nth-Order Rogue Waves to Nonlinear Schrodinger Equation Revisited: A Variable Separation Technique // *Journal of the Physical Society of Japan.* – 2014. – Vol. 83. – P. 104001-1-104001-10.

177 Wazwaz A.M. The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations // *Appl Math Comput.* – 2007. – Vol. 184, Issue 2. – P. 1002-1014.

178 Wazwaz A.M. New solitary wave solutions to the modified forms of Degasperis–Procesi and Camassa–Holm equations // *Appl Math Comput.* – 2007. – Vol. 186, Issue 1. – P. 130-141.

179 Wazwaz A.M. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory.* – Berlin: Springer, 2009. – 700 p.

180 Шайхова Г.Н., Бекова Г.Т., Изгалиев И.Б. Метод гиперболического тангенса для эволюционного уравнения волновой динамики // *Вестник КазНУ.* -2020. №1 (137). стр. 612-616.

181 Ismailova F.Ye., Bekova G., Shaikhova G.N. Traveling wave solitons for the two-dimensional generalized nonlinear Schrodinger equation // *Вестник КазНУ.* – 2019. – №4 (134). - стр. 534-540.

182 Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K. Travelling wave solutions for the two-dimensional Hirota system of equations // *AIP Conference Proceedings.* – 2018. – Vol. 1997. – P. 020039-1-020039-6.

183 Abdelkawya M.A., Bhrawy A.H., Zerrad E. et al. Application of Tanh Method to Complex Coupled Nonlinear Evolution Equations // *Acta Physica Polonica A.* – 2016. – Vol. 129, Issue 3. – P. 278-283.

184 Porsezian K., Nakkeeran K. Optical Soliton Propagation in a Coupled System of the Nonlinear Schrodinger Equation and the Maxwell-Bloch Equations // *J. Mod. Opt.* – 1995. – Vol. 42. – P. 1953-1958.

185 Ma L.-Y., Zhu Z.-N. Nonlocal nonlinear Schrodinger equation and its discrete version: Soliton solutions and gauge equivalence // *Journal of Mathematical Physics.* – 2016. – Vol. 57. – P. 083507-1-083507-23.

186 McCall S.L., Hahn E.L. Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light // *Phys. Rev. Lett.* – 1967. – Vol. 18. – P. 908-911.

187 Zhong L., Li Y., Chen Y. et al. Chaoticons described by nonlocal nonlinear Schrodinger equation // *Sci Rep.* – 2017. – Vol. 7. – P. 41438-1-41438-8.

188 Akhmediev N., Ankiewicz A., Soto-Crespo J.M. Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrodinger equation // Physical Review E. – 2009. – Vol. 80, Issue 2. – P. 026601.

189 Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K. et al. Conservation Laws for Two Dimensional Nonlinear Schrödinger Equation // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2159. – P. 030003-1-030003-5.

190 Мусатай С.С., Бекова Г.Т., Абыканова Б.Т. Решения типа разрушительных волн двумерного нелинейного уравнения шредингера // Вестник КазНУ. – 2020. – №2(138). – С. 715-721.

191 Kupershmidt B.A., Manin Yu.I. Long wave equation with free boundaries. I. Conservation laws // Func. Anal. Appl. – 1977. – Vol. 11, Issue 3. –P. 188-197.

192 Kupershmidt B.A., Manin Yu.I. Long wave equations with a free surface. II. The Hamiltonian structure and the higher equations // Func. Anal. Appl. – 1978. – Vol. 12, Issue 1. – P. 20-29.

193 Lebedev D.R., Manin Yu.I. Conservation laws and representation of Benney's long wave equations // Phys.Lett. A. – 1979. – Vol. 74, Issue 3, 4. – P. 154-156.

194 Teshukov V.M. Characteristics, conservation laws and symmetries of the kinetic equations of motion of bubbles in a fluid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1999. – Vol. 40, Issue 2. – P. 263-275.

195 Hanc J., Tuleja S., Hancova M. Symmetries and conservation laws: Consequences of Noether's theorem // American Journal of Physics. – 2004. – Vol. 72, Issue 4. – P. 428-435.